1

(解説)

$a^x \geqq x\ (x \geqq 0)$ ……① は $x=0$ のとき成り立つ.

$x>0$ の範囲で ① の両辺の対数をとると　$x\log a \geqq \log x$

したがって，$\log a \geqq \dfrac{\log x}{x}$ ……② と変形される.

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=e$

$x>0$ での $f(x)$ の増減表は右のようになる.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	極大	↘

したがって，$f(x)$ の最大値は $f(e)=\dfrac{1}{e}$ である.

よって，② が $x>0$ の範囲で常に成り立つための条件は

$$\log a \geqq \frac{1}{e}\quad \text{すなわち}\quad a \geqq e^{\frac{1}{e}}$$

これが求める a の値の範囲である.

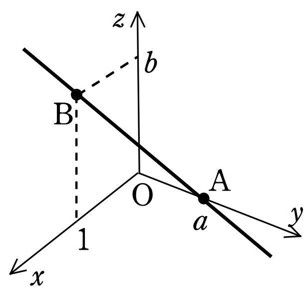
2

(解説)

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表されるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(0,\ a,\ 0)+t(1,\ -a,\ b)$$
$$=(t,\ a(1-t),\ bt)$$

よって　$\mathrm{P}(t,\ a(1-t),\ bt)$



(2)　図形 M を平面 $x=t$ で切ったときの断面は，

中心が $(t,\ 0,\ 0)$，半径 $\sqrt{a^2(1-t)^2+b^2t^2}$ の円である.

よって，その方程式は　$x=t$　かつ　$y^2+z^2=a^2(1-t)^2+b^2t^2$

xy 平面上では $z=0$ であるから　$x=t$　……①，$y^2=a^2(1-t)^2+b^2t^2$　……②

①，② から t を消去すると　$y^2=a^2(1-x)^2+b^2x^2$

ゆえに，求める方程式は　　$(a^2+b^2)x^2-2a^2x-y^2+a^2=0,\ z=0$

(3)　図形 M を平面 $x=t$ で切ったときの断面は円になるから，その断面積を $S(t)$ とすると　$S(t)=\pi\{a^2(1-t)^2+b^2t^2\}$

よって，求める体積は

$$\pi\int_0^1\{a^2(1-t)^2+b^2t^2\}dt=\pi\left[-\frac{a^2}{3}(1-t)^3+\frac{b^2}{3}t^3\right]_0^1=\frac{\pi}{3}(a^2+b^2)$$

3

(解説)

$x^2-x+\dfrac{n-1}{n^2}=\left(x-\dfrac{1}{n}\right)\left(x-1+\dfrac{1}{n}\right)$ であるから，

$x^{2n}=P_n(x)\left(x-\dfrac{1}{n}\right)\left(x-1+\dfrac{1}{n}\right)+a_nx+b_n$ とかける．

$x=\dfrac{1}{n}$，$1-\dfrac{1}{n}$ をそれぞれ両辺に代入すると　$\dfrac{1}{n}a_n+b_n=\left(\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$ …… ①

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)a_n+b_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} \cdots\cdots ②$$

② − ① から　$\left(1-\dfrac{2}{n}\right)a_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n}-\left(\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

すなわち　$\left(1-\dfrac{2}{n}\right)a_n=\left\{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}^2-\dfrac{1}{n^{2n}}$

ここで，両辺について $n\longrightarrow\infty$ とすると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right\}^{-1}=e^{-1}$

であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=e^{-2}$

よって，① から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{2n}}-\frac{1}{n}a_n\right)$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$

4

(解説)

$k=1$ から $k=N$ までの操作終了後，番号 $N+1$ の箱の中に赤玉が残っていると，
$k=N+1$ のとき，番号 $N+1$ の箱の中は白玉となり，不適．
また，k_0 回目の操作で赤玉が初めて番号 $N+1$ の箱から出たとすると，赤玉は番号 k_0 の箱に入ることになる．その後，N 回目までのすべての k 回目の操作の後，赤玉の入った箱の番号が k より大きくなることはない．よって，N 回目までは番号 $N+1$ の箱は白玉のままである．
ゆえに，赤玉が番号 $N+1$ の箱に入るためには，1 回目から N 回目までの少なくとも 1 回の操作で番号 $N+1$ の箱が選ばれ，$N+1$ 回目の操作で赤玉の入った箱が選ばれればよいから，求める確率は　$\left\{1-\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^N\right\}\dfrac{1}{N}$