$\boxed{1}$

(解説)

(1)　$g(x)=f(x)-1=e^x-x-1$ とおく。

$g'(x)=e^x-1$

$g'(x)=0$ とすると　　$x=0$

$g(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって，すべての実数 x について $g(x)\geqq 0$，すなわち $f(x)\geqq 1$ である。

(2)　$S(t)=\int_{t-1}^{t}(e^x-x)dx=\left[e^x-\dfrac{x^2}{2}\right]_{t-1}^{t}=e^t-e^{t-1}-\dfrac{1}{2}\{t^2-(t-1)^2\}$

$$=\left(1-\frac{1}{e}\right)e^t-t+\frac{1}{2}$$

(3)　$S'(t)=\left(1-\dfrac{1}{e}\right)e^t-1=\dfrac{e-1}{e}e^t-1$

$S'(t)=0$ とすると　　$e^t=\dfrac{e}{e-1}$

よって　　$t=\log\dfrac{e}{e-1}=1-\log(e-1)$

$S(t)$ の増減表は右のようになる。

t	$\cdots$	$1-\log(e-1)$	$\cdots$
$S'(t)$	$-$	0	$+$
$S(t)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，$S(t)$ は $t=1-\log(e-1)$ のとき極小かつ最小であり，その最小値は

$$\frac{e-1}{e}\times\frac{e}{e-1}-1+\log(e-1)+\frac{1}{2}=\log(e-1)+\frac{1}{2}$$

$\boxed{2}$

(解説)

$$\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}dx + \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int_0^2 \frac{(x^2+4)'}{\sqrt{x^2+4}}dx = \left[2\sqrt{x^2+4}\right]_0^2 = 4\sqrt{2}-4$$

また，$x=2\tan\theta$ とおくと　　$dx = \dfrac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 2$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{4\tan^2\theta+4}} \cdot \frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，$\sin\theta = u$ とおくと　　$d\theta = \dfrac{du}{\cos\theta}$

θ と u の対応は右のようになる。

θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$
u	$0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$

よって，① は

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{1-u^2} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{(1+u)(1-u)}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)du = \frac{1}{2}\Big[-\log(1-u) + \log(1+u)\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log\frac{1+u}{1-u}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \log(\sqrt{2}+1)$$

ゆえに　　$\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}dx = 4\sqrt{2}-4+\log(\sqrt{2}+1)$

$\boxed{3}$

(解説)

n 段の階段の昇り方を a_n 通りとすると　　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$

$n \geqq 4$ のとき，次の [1]，[2] の場合がある。

[1]　最初の 1 歩で 1 段昇るとき

　残りの $n-1$ 段の昇り方は　　a_{n-1} 通り

[2]　最初の 1 歩で 2 段昇るとき

　次の 1 歩は必ず 1 段昇るから，残りの $n-3$ 段の昇り方は　　a_{n-3} 通り

[1]，[2] は同時に起こらないから　　$a_n=a_{n-1}+a_{n-3}$　$(n \geqq 4)$

この漸化式を用いて，a_{15} まで順に求めて表にすると，次のようになる。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189	277

よって，求める昇り方は　　277 通り

[別解]　1 歩で 1 段昇ることを A，1 歩で 2 段昇ることを B で表す。

A が m 回，B が n 回のとき，B が連続しない昇り方は，m 個の ○ を 1 列に並べておき，その間と両端の $m+1$ 箇所に n 個の × を並べる方法の数に等しいから

$${}_{m+1}\mathrm{C}_n \text{ 通り}\qquad\text{ただし，} m+1 \geqq n \quad \cdots\cdots ①$$

また　　$m+2n=15$　$\cdots\cdots$ ②

①，② を満たす 0 以上の整数 m，n は

$$(m,\ n)=(15,\ 0),\ (13,\ 1),\ (11,\ 2),\ (9,\ 3),\ (7,\ 4),\ (5,\ 5)$$

よって，求める昇り方は

$$\begin{aligned}{}_{16}\mathrm{C}_0+{}_{14}\mathrm{C}_1+{}_{12}\mathrm{C}_2+{}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{8}\mathrm{C}_4+{}_{6}\mathrm{C}_5&=1+14+66+120+70+6\\&=277\ (\text{通り})\end{aligned}$$

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_n = j$ となる場合の数が $A_n(j)$ である。

(ア)　$j=1$ のとき　　$a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_n = 1$

これを満たす数列は1通りであるから　　$A_n(1) = 1$

$j=2$ のとき　　$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_{n-1} \leqq 2$ かつ $a_n = 2$

a_1，a_2，……，a_{n-1} は1または2であり，1となるものは0個 ～ $n-1$ 個ある。

よって　　$A_n(2) = n$

別解1　$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_{n-1} \leqq 2$ から

$$1 \leqq a_1 < a_2 + 1 < \cdots\cdots < a_{n-1} + (n-2) \leqq n$$

これを満たす数列は，異なる n 個のものから $n-1$ 個を取る方法の数だけ存在する。

よって　　$A_n(2) = {}_n\mathrm{C}_{n-1} = n$

別解2　$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_{n-1} \leqq 2$ を満たす数列の数は，異なる2個のものから重複を許して $n-1$ 個取る組合せの数と等しい。

それは $n-1$ 個の ○ と1個の仕切り | の順列の総数に等しいから

$$A_n(2) = {}_{(n-1)+1}\mathrm{C}_{n-1} = {}_n\mathrm{C}_{n-1} = n$$

(イ)　$n \geqq 2$ のとき

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n = j \quad (j=3,\ 4) \quad \cdots\cdots ①$$

について，a_{n-1} のとりうる値は1，2，……，j である。

① を満たす数列の数は　　$a_{n-1}=1$ のとき　　$A_{n-1}(1)$ 通り

$a_{n-1}=2$ のとき　　$A_{n-1}(2)$ 通り

⋮　　⋮

$a_{n-1}=j$ のとき　　$A_{n-1}(j)$ 通り

それぞれの場合は同時には起こらないから

$$A_n(j) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + \cdots\cdots + A_{n-1}(j)$$

よって
$$\begin{aligned} A_n(3) &= A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3) \\ &= 1 + (n-1) + A_{n-1}(3) \end{aligned}$$

すなわち　　$A_n(3) - A_{n-1}(3) = n$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$A_n(3) = A_1(3) + \sum_{k=2}^{n} k = 1 + \sum_{k=1}^{n} k - 1 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

同様に
$$\begin{aligned} A_n(4) &= A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3) + A_{n-1}(4) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) + A_{n-1}(4) \end{aligned}$$

すなわち　　$A_n(4)-A_{n-1}(4)=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$A_n(4)=A_1(4)+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)-1=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)$$

ここで，$k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)=3k(k+1)$ であるから

$$3\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}=n(n+1)(n+2)$$

したがって　　$A_n(4)=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

$\boxed{\text{別解}}$　(ア) の別解 2 と同様に考えると

$$A_n(3)={}_{(n-1)+2}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n+1}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n+1}\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$A_n(4)={}_{(n-1)+3}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n+2}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n+2}\mathrm{C}_3=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

(2)　カードの取り出し方の総数は　　4^n 通り

$a_{n-1}=j$ のとき，$a_1\leqq a_2\leqq\cdots\cdots\leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1}>a_n$ となる場合の数は

$$A_{n-1}(j)\cdot(j-1)\text{ 通り}$$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{4^n}\{A_{n-1}(1)\cdot 0+A_{n-1}(2)\cdot 1+A_{n-1}(3)\cdot 2+A_{n-1}(4)\cdot 3\}$$

$$=\frac{1}{4^n}\left\{(n-1)\cdot 1+\frac{1}{2}(n-1)n\cdot 2+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)\cdot 3\right\}$$

$$=\frac{1}{4^n}\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{2+2n+n(n+1)\}=\frac{1}{4^n}\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{2(n+1)+n(n+1)\}$$

$$=\frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{2\cdot 4^n}$$

$\boxed{5}$

(解説)

$$a+b+c+d=0 \quad \cdots\cdots ①$$
$$ad-bc+p=0 \quad \cdots\cdots ②$$
$$a \geqq b \geqq c \geqq d \quad \cdots\cdots ③$$

① から　　$d=-a-b-c$

これを ② に代入して　　$a(-a-b-c)-bc+p=0$

すなわち　　$a^2+(b+c)a+bc=p$

変形すると　　$(a+b)(a+c)=p \quad \cdots\cdots ④$

③ から　　$a+b \geqq c+d$　　これと ① から　　$a+b \geqq 0$

よって，③ と ④ より，$a+b \geqq a+c>0$ であり，p は正の素数であるから

$$a+b=p,\ a+c=1$$

ゆえに，$b=p-a$，$c=1-a$ となり

$$d=-a-(p-a)-(1-a)=a-p-1$$

これらを ③ に代入すると

$$a \geqq p-a \geqq 1-a \geqq a-p-1$$

$a \geqq p-a$ から　　$p \leqq 2a$　　$1-a \geqq a-p-1$ から　　$p \geqq 2a-2$

よって　　$2a-2 \leqq p \leqq 2a$

p は 3 以上の素数であるから，奇数である。

したがって　　$p=2a-1$

よって，$a=\dfrac{p+1}{2}$ であり

$$b=p-a=p-\frac{p+1}{2}=\frac{p-1}{2}$$
$$c=1-a=1-\frac{p+1}{2}=\frac{1-p}{2}$$
$$d=a-p-1=\frac{p+1}{2}-p-1=-\frac{p+1}{2}$$