

1

$AB=2$, $BC=x$, $CA=3$ である $\triangle ABC$ がある。

- (1) x のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ が鈍角三角形であるとき、 x の値の範囲を求めよ。
- (3) $A < 60^\circ$ であるとき、 x の値の範囲を求めよ。

2

1 辺の長さが 13 の正三角形 ABC とその外接円がある。外接円の点 B を含まない弧 CA 上に、点 D を弦 CD の長さが 7 になるようにとるとき、次のものを求めよ。

- (1) $\triangle ACD$ の面積
- (2) $\sin \angle ACD$
- (3) $\triangle ADB$ と $\triangle CDB$ の面積比
- (4) $\triangle ADB$ の面積
- (5) 線分 BD の長さ

3

円 O に内接する四角形 $ABCD$ は、 $AD \parallel BC$, $AB=3$, $BC=5$, $\angle ABC=60^\circ$ を満たす。このとき、次のものを求めよ。

- (1) 線分 AC の長さ
- (2) 辺 CD の長さ
- (3) 辺 AD の長さ
- (4) 円 O の半径
- (5) 四角形 $ABCD$ の面積

4

$AB=AC=AD=\sqrt{21}$, $BC=CD=DB=6$ である三角錐 $ABCD$ において、頂点 A から $\triangle BCD$ に垂線 AH を下ろす。このとき、次のものを求めよ。

- (1) AH の長さ
- (2) この三角錐の体積
- (3) この三角錐の表面積
- (4) この三角錐に内接する球の体積

5

11 本のくじの中に 4 本の当たりが含まれている。この中から同時に 3 本を引くとき、3 本の中に含まれる当たりくじの本数の期待値を求めよ。

6

1, 5 の目が出る確率がそれぞれ同じで p , 2, 3, 4, 6 の目が出る確率がそれぞれ同じで q となる正しくないさいころがある。このさいころを 1 回投げるときの出る目の期待値が $\frac{10}{3}$ となるように、 p, q の値を定めよ。

7

- (1) 1 年生 2 人, 2 年生 2 人, 3 年生 2 人の 6 人の生徒がでたらめに 1 列に並ぶとき, 同じ学年の生徒は全学年とも隣り合う確率を求めよ。
- (2) 3 人の女子と 10 人の男子が円卓に座るとき, 男子が連続して 5 人以上並ばない確率を求めよ。

8

0, 1, 2, 3, 4 から異なる 3 個の数字を用いて 3 桁の整数 xyz を作る。このとき、次の確率を求めよ。

- (1) xyz が 3 の倍数である確率
- (2) $y > z$ である確率

9

1 から 6 までの目が等しい確率で出るさいころを 4 回投げる試行を考える。

- (1) 出る目の最小値が 1 である確率を求めよ。
- (2) 出る目の最小値が 1 で、かつ最大値が 6 である確率を求めよ。

10

xy 平面上の点 P は原点から出発して、次の規則で動くものとする。

さいころを振って、偶数の目が出れば、 x 軸の正の方向に 1 だけ動き、
奇数の目が出れば、 y 軸の正の方向に 1 だけ動く。

さいころを 6 回振るとき、次の確率を求めよ。

- (1) P が点 $(3, 3)$ にくる確率
- (2) P が点 $(1, 2)$ または点 $(2, 3)$ を通る確率

11

箱 A には白玉 4 個と赤玉 5 個，箱 B には白玉 3 個と赤玉 2 個と青玉 7 個が入っている。
まず，任意に 1 つの箱を選び，次にその箱の中から玉を 1 個取り出すものとする。取り出された玉の色が白であったとき，それが箱 B から取り出された確率を求めよ。

12

ある 2 つの事象 A ， B について，

$$P_A(B) = \frac{1}{2}, P_B(A) = \frac{3}{5}, P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$

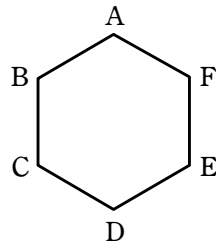
であるとき，次の値を求めよ。

- (1) $P(A)$ (2) $P(B)$ (3) $P(\overline{A} \cap B)$ (4) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

13

1 辺の長さが 2 である正六角形 ABCDEF がある。6 つの頂点のうち 3 点を無作為に選ぶとき，次の問いに答えよ。

- (1) 選んだ 3 点を頂点とする三角形が，正三角形になる確率を求めよ。
(2) 選んだ 3 点を頂点とする三角形が，直角三角形になる確率を求めよ。
(3) 選んだ 3 点を頂点とする三角形の面積の期待値を求めよ。



14

袋の中に赤球 1 個，黄球 2 個，緑球 3 個，青球 4 個の合わせて 10 個の球が入っている。
この袋から一度に 3 個の球を取り出すとき，次の確率を求めよ。

- (1) 3 個の球の色がすべて同じである確率
(2) 3 個の球の色がすべて異なる確率

15

赤球 3 個と白球 2 個が入った袋の中から球を 1 個取り出し，その球と同じ色の球を 1 個加えて 2 個とも袋に戻す。この作業を 3 回繰り返すとき，次の確率を求めよ。

- (1) 赤球を 3 回続けて取り出す確率
(2) 作業が終わった後，袋の中に赤球と白球が 4 個ずつ入っている確率

16

A，B の 2 種類のカードがある。A を 2 枚，B を 3 枚それぞれ積み重ね，3 人の人が順番に 1 枚のカードを次のように持ち帰ることにする。A，B 両方のカードが残っているときは，A か B かを確率 $\frac{1}{2}$ で選んで 1 枚持ち帰る。また，どちらか一方のカードしか残っていないときはそれを 1 枚持ち帰る。このようにすると最後に 2 枚のカードが残る。

- (1) A のカードが 2 枚残る確率を求めよ。
(2) B のカードが 2 枚残る確率を求めよ。
(3) B のカードが 2 枚残ったとき，1 番目の人が B のカードを持ち帰った条件付き確率を求めよ。

1

【解答】 (1) $1 < x < 5$ (2) $1 < x < \sqrt{5}$, $\sqrt{13} < x < 5$ (3) $1 < x < \sqrt{7}$

2

【解答】 (1) $14\sqrt{3}$ (2) $\frac{4\sqrt{3}}{13}$ (3) $8:7$ (4) $30\sqrt{3}$ (5) 15

3

【解答】 (1) $\sqrt{19}$ (2) 3 (3) 2 (4) $\frac{\sqrt{57}}{3}$ (5) $\frac{21\sqrt{3}}{4}$

4

【解答】 (1) 3 (2) $9\sqrt{3}$ (3) $27\sqrt{3}$ (4) $\frac{4}{3}\pi$

5

【解答】 $\frac{12}{11}$ 本

6

【解答】 $p = \frac{5}{18}$, $q = \frac{1}{9}$

7

【解答】 (1) $\frac{1}{15}$ (2) $\frac{1}{11}$

8

【解答】 (1) $\frac{5}{12}$ (2) $\frac{1}{2}$

9

【解答】 (1) $\frac{671}{1296}$ (2) $\frac{151}{648}$

10

【解答】 (1) $\frac{5}{16}$ (2) $\frac{1}{2}$

11

【解答】 $\frac{9}{25}$

12

【解答】 (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{5}$ (4) $\frac{1}{5}$

13

【解答】 (1) $\frac{1}{10}$ (2) $\frac{3}{5}$ (3) $\frac{9\sqrt{3}}{5}$

14

【解答】 (1) $\frac{1}{24}$ (2) $\frac{5}{12}$

15

【解答】 (1) $\frac{2}{7}$ (2) $\frac{9}{35}$

16

【解答】 (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$

1

(1) 条件から $3-2 < x < 3+2$ よって $1 < x < 5$

(2) [1] $1 < x < 3$ のとき, 最大辺の長さは3であるから, その対角が 90° より大きいとき鈍角三角形になる。

ゆえに $3^2 > 2^2 + x^2$ すなわち $x^2 - 5 < 0$

よって $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) < 0$ ゆえに $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$

$1 < x < 3$ との共通範囲は $1 < x < \sqrt{5}$

[2] $3 \leq x < 5$ のとき, 最大辺の長さは x であるから, その対角が 90° より大きいとき鈍角三角形になる。

ゆえに $x^2 > 2^2 + 3^2$ すなわち $x^2 - 13 > 0$

よって $(x + \sqrt{13})(x - \sqrt{13}) > 0$ ゆえに $x < -\sqrt{13}$, $\sqrt{13} < x$

$3 \leq x < 5$ との共通範囲は $\sqrt{13} < x < 5$

[1], [2] を合わせて $1 < x < \sqrt{5}$, $\sqrt{13} < x < 5$

(3) $A < 60^\circ$ となるための条件は $\cos A > \cos 60^\circ$

$$\text{ここで } \cos A = \frac{2^2 + 3^2 - x^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{13 - x^2}{12}$$

$$\text{よって } \frac{13 - x^2}{12} > \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに } x^2 - 7 < 0$$

$$\text{よって, } (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7}) < 0 \text{ から } -\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$$

$$(1) \text{ より, } 1 < x < 5 \text{ であるから } 1 < x < \sqrt{7}$$

[2]

(1) 四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

よって, $\triangle ACD$ において余弦定理より

$$13^2 = AD^2 + 7^2 - 2AD \cdot 7 \cos 120^\circ$$

$$\text{整理すると } AD^2 + 7AD - 120 = 0$$

$$\text{ゆえに } (AD - 8)(AD + 15) = 0$$

$$AD > 0 \text{ であるから } AD = 8$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \triangle ACD &= \frac{1}{2} AD \cdot CD \sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3} \end{aligned}$$

(2) $\triangle ACD = \frac{1}{2} AC \cdot CD \sin \angle ACD$ であるから

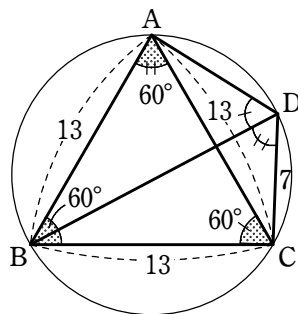
$$\sin \angle ACD = \frac{2\triangle ACD}{AC \cdot CD} = \frac{2 \cdot 14\sqrt{3}}{13 \cdot 7} = \frac{4\sqrt{3}}{13}$$

(3) $\angle ADB = \angle ACB = 60^\circ$, $\angle BDC = \angle BAC = 60^\circ$ であるから

$$\triangle ADB : \triangle CDB = \frac{1}{2} AD \cdot BD \sin 60^\circ : \frac{1}{2} CD \cdot BD \sin 60^\circ = AD : CD = 8 : 7$$

(4) 四角形 ABCD の面積を S とすると

$$S = \triangle ABC + \triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot 13^2 \sin 60^\circ + 14\sqrt{3} = \frac{169\sqrt{3}}{4} + 14\sqrt{3} = \frac{225\sqrt{3}}{4}$$



$$\text{よって } \triangle ADB = \frac{8}{8+7} S = \frac{8}{15} \cdot \frac{225\sqrt{3}}{4} = 30\sqrt{3}$$

$$(5) \triangle ADB = \frac{1}{2} AD \cdot BD \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot BD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} BD$$

$$\text{よって } BD = \frac{\triangle ADB}{2\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 15$$

[3]

(1) $\triangle ABC$ において, 余弦定理により

$$AC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 19$$

$$AC > 0 \text{ であるから } AC = \sqrt{19}$$

(2) 頂点 A, D から辺 BC にそれぞれ垂線 AH, DI を下ろすと, $AD \parallel BC$ であるから, 四角形 AHID は長方形である。

$$\text{よって } AH = DI \quad \dots\dots ①,$$

$$\angle AHB = \angle DIC = 90^\circ \quad \dots\dots ②$$

また, 四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABH = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\text{よって } \angle CDI = \angle ADC - \angle ADI = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$$

$$\text{ゆえに } \angle BAH = \angle CDI \quad \dots\dots ③$$

$$① \sim ③ \text{ から } \triangle ABH \cong \triangle DCI \quad \text{したがって } CD = BA = 3$$

$$(3) BH = CI = 3 \cos 60^\circ = \frac{3}{2}$$

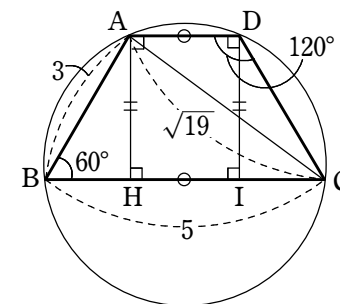
$$\text{よって } AD = HI = BC - BH - IC = 5 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 2$$

(4) 円 O の半径を R とする。 $\triangle ABC$ において, 正弦定理により

$$\frac{\sqrt{19}}{\sin 60^\circ} = 2R \quad \text{よって } R = \frac{\sqrt{19}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{57}}{3}$$

(5) 求める面積は

$$\triangle ABC + \triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ$$



$$= \frac{15}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{4}$$

別解 $\frac{1}{2}(AD+BC)AH = \frac{1}{2}(2+5) \cdot 3\sin 60^\circ = \frac{21}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{4}$

4

(1) $\triangle ABH$, $\triangle ACH$, $\triangle ADH$ はいずれも直角三角形で

$AB=AC=AD$, AH は共通

であるから、これらの直角三角形は合同である。

よって、 $BH=CH=DH$ であるから、 H は $\triangle BCD$ (正三角形) の外接円の中心である。

ゆえに、 $\triangle BCD$ において、正弦定理により

$$\frac{6}{\sin 60^\circ} = 2 \cdot BH$$

よって $BH = \frac{6}{2\sin 60^\circ} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

したがって、三平方の定理により

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{(\sqrt{21})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{9} = 3$$

(2) $\triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sin 60^\circ = 9\sqrt{3}$

よって、三角錐 $ABCD$ の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3} \triangle BCD \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 3 = 9\sqrt{3}$$

(3) $\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形であるから、

A から辺 BC に下ろした垂線を AE とすると

$$BE = CE = \frac{6}{2} = 3$$

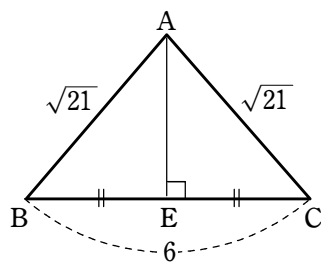
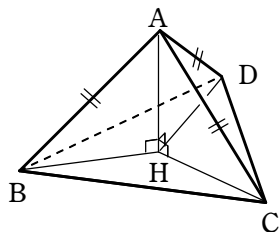
よって、三平方の定理により

$$AE = \sqrt{(\sqrt{21})^2 - 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

ゆえに $\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

同様に $\triangle ACD = \triangle ADB = 6\sqrt{3}$

したがって、三角錐 $ABCD$ の表面積を S とすると



$$S = \triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADB + \triangle BCD$$

$$= 3 \times 6\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$$

(4) 内接する球の中心を I , 半径を r とすると

$$V = (\text{三角錐 } IABC) + (\text{三角錐 } IACD)$$

$$+ (\text{三角錐 } IADB) + (\text{三角錐 } IBCD)$$

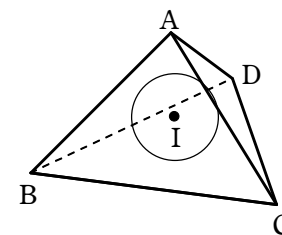
$$= \frac{1}{3} \triangle ABC \cdot r + \frac{1}{3} \triangle ACD \cdot r$$

$$+ \frac{1}{3} \triangle ADB \cdot r + \frac{1}{3} \triangle BCD \cdot r$$

$$= \frac{1}{3} (\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADB + \triangle BCD) r = \frac{1}{3} S r$$

よって、(2), (3) の結果から $9\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 27\sqrt{3} \cdot r$ ゆえに $r=1$

したがって、求める球の体積は $\frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3} \pi$



5

引いた当たりの本数を X 本とする。

X のとりうる値は 0, 1, 2, 3 のいずれかで、それらの値をとる確率 P は、それぞれ

$$\frac{{}_7C_3}{{}_{11}C_3}, \frac{{}_7C_2 \times {}_4C_1}{{}_{11}C_3}, \frac{{}_7C_1 \times {}_4C_2}{{}_{11}C_3}, \frac{{}_4C_3}{{}_{11}C_3}$$

すなわち $\frac{35}{165}, \frac{84}{165}, \frac{42}{165}, \frac{4}{165}$ である。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{35}{165}$	$\frac{84}{165}$	$\frac{42}{165}$	$\frac{4}{165}$	1

よって、 X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = 0 \times \frac{35}{165} + 1 \times \frac{84}{165} + 2 \times \frac{42}{165} + 3 \times \frac{4}{165} = \frac{180}{165} = \frac{12}{11} \text{ (本)}$$

6

期待値について

$$1 \times p + 2 \times q + 3 \times q + 4 \times q + 5 \times p + 6 \times q = \frac{10}{3}$$

よって $18p + 45q = 10$ ①

確率の和は1であるから

$$p + q + q + q + p + q = 1$$

よって $2p + 4q = 1$ ②

①, ② を解いて $p = \frac{5}{18}, q = \frac{1}{9}$

$0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1$ であり, 問題に適する。

7

(1) 6人を1列に並べる方法は全部で ${}_6P_6$ 通り

このうち, 同じ学年の生徒が全学年とも隣り合う場合は

同じ学年の生徒2人を1組と考えると, 3組の並び方は ${}_3P_3$ 通り

そのおのおのに対して, 3組の生徒の並び方は 2^3 通り

であるから ${}_3P_3 \times 2^3$ 通り

よって, 求める確率は $\frac{{}_3P_3 \times 2^3}{{}_6P_6} = \frac{2^3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{15}$

(2) 13人の座り方は $(13-1)!$ 通り

女子の座り方は $(3-1)!$ 通り

男子が5人以上連続して座らないのは, 女子と女子の間の3か所に

[1] 4人, 4人, 2人

[2] 4人, 3人, 3人

男子が座る場合である。

[1] の場合

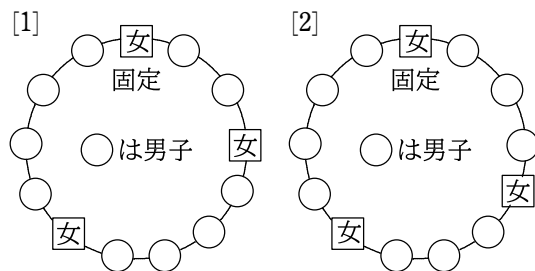
男子が並んで座る座席を女子と女子の間の3か所に分ける方法は

$$\frac{3!}{2!} = 3 \text{ (通り)}$$

男子の座り方は ${}_{10}P_{10}$ 通りであるから, このときの場合の数は $3 \times {}_{10}P_{10}$ 通り

[2] の場合 [1] と同様にして $3 \times {}_{10}P_{10}$ 通り

したがって, 求める確率は $\frac{(3-1)! \times 3 \times {}_{10}P_{10} \times 2}{(13-1)!} = \frac{1}{11}$



8

百の位は0以外の数であるから, 3桁の整数 xyz の総数は

$$4 \times {}_4P_2 = 48 \text{ (個)}$$

(1) xyz が3の倍数である条件は, $x+y+z$ が3の倍数となることである。

この条件を満たす x, y, z の組と, xyz の個数は

$\{0, 1, 2\}, \{0, 2, 4\}$ のとき 各 $2 \times {}_2P_2 = 4$ (個)

$\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}$ のとき 各 ${}_3P_3 = 3! = 6$ (個)

ゆえに, xyz が3の倍数である整数は $4 \times 2 + 6 \times 2 = 20$ (個)

よって, 求める確率は $\frac{20}{48} = \frac{5}{12}$

(2) 使う数字が異なるから, $y \neq z$ であり, $y > z$ である整数と $y < z$ である整数は同じ個数ずつ, すなわち $48 \div 2 = 24$ (個) ずつある。

よって, 求める確率は $\frac{24}{48} = \frac{1}{2}$

9

(1) 出る目の最小値が1であるとは, 少なくとも1回は1の目が出るということである。

これは4回とも1の目が出ないという事象を A とすると, A の余事象 $\overline{A}$ である。

よって, 求める確率は

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5^4}{6^4} = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$$

(2) 出る目の最小値が1で, かつ最大値が6であるとは, 少なくとも1回は1の目が出て, かつ少なくとも1回は6の目が出るということである。よって, 4回とも6の目が出ない事象を B とすると, この事象は(1)の A も用いて $\overline{A} \cap \overline{B}$ で表される。

よって, 求める確率は

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\ &= 1 - \left(\frac{5^4}{6^4} + \frac{5^4}{6^4} - \frac{4^4}{6^4} \right) \\ &= 1 - \frac{625 + 625 - 256}{1296} = \frac{151}{648} \end{aligned}$$

10

さいころを1回振るとき、偶数、奇数の目は3通りずつあるから、 x 軸、 y 軸の正の方向に1だけ動くことは同様に確からしい。また、さいころを6回振ると

P が動く経路は全部で $2^6 = 64$ (通り)

(1) x 軸、 y 軸の正の方向に1だけ動くことを、それぞれ $\rightarrow$ 、 $\uparrow$ で表す。

点(3, 3)にくる経路は、 $\rightarrow$ 3個、 $\uparrow$ 3個の順列の総数で ${}_6C_3$ 通り

よって、求める確率は $\frac{{}_6C_3}{64} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$

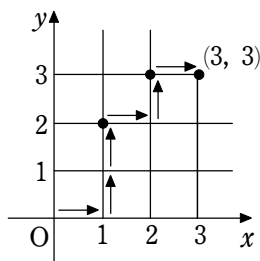
(2) 点(1, 2)を通る確率は $\frac{{}_3C_1 \times 2^3}{64} = \frac{3 \times 8}{64} = \frac{3}{8}$

点(2, 3)を通る確率は $\frac{{}_5C_2 \times 2}{64} = \frac{10 \times 2}{64} = \frac{5}{16}$

点(1, 2)と点(2, 3)をともに通る確率は

$$\frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1 \times 2}{64} = \frac{3 \times 2 \times 2}{64} = \frac{3}{16}$$

よって、求める確率は $\frac{3}{8} + \frac{5}{16} - \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$



11

箱 A を選ぶという事象を A 、箱 B を選ぶという事象を B 、白玉を取り出すという事象を W とする。

このとき、 A と B は互いに排反である。

白玉を取り出す確率 $P(W)$ は

$$\begin{aligned} P(W) &= P(A \cap W) + P(B \cap W) \\ &= P(A)P_A(W) + P(B)P_B(W) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{12} = \frac{2}{9} + \frac{1}{8} = \frac{25}{72} \end{aligned}$$

よって、求める確率は

$$P_W(B) = \frac{P(B \cap W)}{P(W)} = \frac{1}{8} \div \frac{25}{72} = \frac{1}{8} \times \frac{72}{25} = \frac{9}{25}$$

12

(1) $P(A \cap B) = P(A)P_B(A)$ から

$$\frac{3}{10} = P(A) \times \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } P(A) = \frac{3}{10} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

(2) $P(B \cap A) = P(B)P_B(A)$ から

$$\frac{3}{10} = P(B) \times \frac{3}{5}$$

$$\text{よって } P(B) = \frac{3}{10} \div \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$$

(3) (1) より、 $P(A) = P_B(A)$ であるから、2つの事象 A 、 B は独立であり、事象 $\overline{A}$ 、 B も独立である。

$$\text{ここで } P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\text{よって } P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

(4) 事象 A 、 B が独立であるから、事象 $\overline{A}$ 、 $\overline{B}$ も独立である。

$$\text{ここで } P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

13

6つの頂点から3点を選ぶ方法の総数は ${}_6C_3 = 20$ (通り)

(1) 選んだ3点を頂点とする三角形が、正三角形になるのは、3点の組が

(A と C と E) または (B と D と F)

になる場合に限る。

$$\text{よって、求める確率は } \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

(2) たとえば、正六角形と辺 AB を共有する直角三角形は2個あり、 $\triangle ABD$ と $\triangle ABE$ である。

正六角形の他の辺についても、その辺を共有する直角三角形は辺ごとに2個ずつ存在する。

よって、直角三角形の個数は $6 \times 2 = 12$ (個)

したがって、求める確率は $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

(3) $\triangle ABC$ のように、正六角形と 2 辺を共有する三角形は 6 個ある。

三角形は全部で 20 個あり、(1) より正三角形が 2 個、(2) より直角三角形が 12 個、正六角形と 2 辺を共有する三角形は 6 個ある。

よって、20 個の三角形は、3 種類に分類される。

おのおのの三角形の面積を求める。

[1] 正三角形

$\triangle ACE$ の面積を求める。

A から CE に引いた垂線を AH とする。

このとき $2CH = CE$

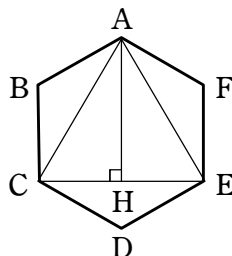
CD = 2 であるから

$$CH = \sqrt{3}$$

よって $CE = 2\sqrt{3}$

また $AH = \sqrt{3}CH = 3$

よって $\triangle ACE = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot AH = 3\sqrt{3}$



[2] 直角三角形

$\triangle ABE$ の面積を求める。

AB = 2, AE = CE = $2\sqrt{3}$ であるから

$$\triangle ABE = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AE = 2\sqrt{3}$$

[3] 正六角形と 2 辺を共有する三角形

$\triangle CDE$ の面積を求める。

CE = $2\sqrt{3}$, DH = AD - AH = 4 - 3 = 1

であるから $\triangle CDE = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot DH = \sqrt{3}$

三角形の面積を X とする。

X の値と、 X がその値をとる確率 P は、次の表ようになる。

X	$3\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	計
P	$\frac{2}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{6}{20}$	1

よって、 X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = 3\sqrt{3} \times \frac{2}{20} + 2\sqrt{3} \times \frac{12}{20} + \sqrt{3} \times \frac{6}{20} = \frac{36\sqrt{3}}{20} = \frac{9\sqrt{3}}{5}$$

[14]

10 個の球から 3 個を取り出す場合の総数は ${}_{10}C_3$ 通り

(1) 3 個の球の色がすべて同じであるのは

A : 3 個とも緑, B : 3 個とも青

の場合であり、事象 A , B は互いに排反である。

よって、求める確率は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{{}_3C_3}{{}_{10}C_3} + \frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{120} + \frac{4}{120} = \frac{1}{24}$$

(2) 3 個の球の色がすべて異なるのは、3 個の球の色が次の [1] ~ [4] のようになる場合である。

[1] 赤・黄・緑 [2] 赤・黄・青 [3] 赤・緑・青 [4] 黄・緑・青

事象 [1] ~ [4] は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{{}_{10}C_3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{{}_{10}C_3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 4}{{}_{10}C_3} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{{}_{10}C_3} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

[15]

(1) 3 回とも赤球が取り出されるとき、2 回目、3 回目の試行の直前の袋の中の赤球の数

は、それぞれ 4 個、5 個となるから、求める確率は $\frac{3}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$

(2) 3 回の試行後に赤球 4 個、白球 4 個となるのは、3 回のうち、赤球が 1 回、白球が 2 回取り出されるときである。それには、1 回目、2 回目、3 回目の順に

[1] 赤球 → 白球 → 白球

[2] 白球 → 赤球 → 白球

[3] 白球 → 白球 → 赤球

と取り出される場合がある。

[1] ~ [3] の事象は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{6} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{35} \times 3 = \frac{9}{35}$$

16

- (1) 3人とも B のカードを選ぶときであるから、求める確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
- (2) B のカードが 2 枚残るのは、次のいずれかの場合であり、これらは互いに排反である。

[1] 3人が A, A, B の順にカードを持ち帰るとき

$$\text{このときの確率は} \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$$

[2] 3人が A, B, A の順にカードを持ち帰るとき

$$\text{このときの確率は} \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

[3] 3人が B, A, A の順にカードを持ち帰るとき

$$\text{このときの確率は} \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$[1], [2], [3] \text{ から, 求める確率は} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

- (3) B のカードが 2 枚残るという事象を C , 1 番目の人が B のカードを持ち帰るという

$$\text{事象を } D \text{ とすると, (2) から} \quad P(C) = \frac{1}{2}, \quad P(C \cap D) = \frac{1}{8}$$

$$\text{したがって, 求める確率は} \quad P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{1}{8} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$