【定期試験対策講習】

３学期
学年末考査
対策教材②

中３甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｒ「数列」範囲の数学的帰納法
数学Ｋ「対数関数」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

次の不等式を解け。

(1) $\log_{0.3}(2-x) \geqq \log_{0.3}(3x+14)$　(2) $\log_2(x-2) < 1+\log_{\frac{1}{2}}(x-4)$

(3) $(\log_2 x)^2-\log_2 4x > 0$

$\boxed{2}$

次のものを求めよ。

(1) $xy=10^5$，$10 \leqq x \leqq 1000$ のとき，$z=(\log_{10}x)(\log_{10}y)$ の最大値と最小値

(2) $x>0$，$y>0$ で $2x+3y=12$ のとき，$z=\log_6 x+\log_6 y$ の最大値

$\boxed{3}$

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。15^{10} は ${}^{ア}\boxed{}$ 桁の整数であり，$\left(\frac{3}{5}\right)^{100}$ は小数第 ${}^{イ}\boxed{}$ 位に初めて 0 でない数字が現れる。

$\boxed{4}$

n を自然数とするとき，$5^{n+1}+6^{2n-1}$ は 31 の倍数であることを，数学的帰納法によって証明せよ。

$\boxed{5}$

3 以上のすべての自然数 n について，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$3^{n-1} > n^2-n+2 \quad \cdots\cdots ①$$

$\boxed{6}$

n は自然数とする。2 数 x，y の和，積がともに整数のとき x^n+y^n は整数であることを，数学的帰納法によって証明せよ。

$\boxed{7}$

$a_1=1$，$a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{8}$

次の各組の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) 1.5，$\log_3 5$　(2) 2，$\log_4 9$，$\log_2 5$

(3) $\log_{0.5}3$，$\log_{0.5}2$，$\log_3 2$，$\log_5 2$

$\boxed{9}$

$\log_2 3=a$，$\log_3 5=b$ のとき，$\log_2 10$ と $\log_{15}40$ を a，b で表せ。

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答　(1)　$-3 \leqq x < 2$　　(2)　$4 < x < 3+\sqrt{3}$　　(3)　$0 < x < \dfrac{1}{2}$，$4 < x$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$x=100\sqrt{10}$，$y=100\sqrt{10}$ で最大値 $\dfrac{25}{4}$，$x=10$，$y=10000$ で最小値 4

(2)　$x=3$，$y=2$ で最大値 1

$\boxed{3}$

解答　(ア)　12　　(イ)　23

$\boxed{4}$

解答　略

$\boxed{5}$

解答　略

$\boxed{6}$

解答　略

$\boxed{7}$

解答　$a_n = 2^{2-2^{2-n}}$

$\boxed{8}$

解答　(1)　$1.5 > \log_3 5$　　(2)　$\log_4 9 < 2 < \log_2 5$

(3)　$\log_{0.5} 3 < \log_{0.5} 2 < \log_5 2 < \log_3 2$

$\boxed{9}$

解答　$\log_2 10 = 1+ab$，$\log_{15} 40 = \dfrac{3+ab}{a+ab}$

$\boxed{1}$

解説

(1)　真数は正であるから，$2-x>0$ かつ $3x+14>0$ より　　$-\dfrac{14}{3} < x < 2$　……①

底 0.3 は 1 より小さいから，不等式より　　$2-x \leqq 3x+14$

よって　　$x \geqq -3$　……②

①，② の共通範囲を求めて　　$-3 \leqq x < 2$

(2)　真数は正であるから，$x-2>0$ かつ $x-4>0$ より　　$x>4$

$1=\log_2 2$，$\log_{\frac{1}{2}}(x-4) = -\log_2(x-4)$ であるから，不等式は

$$\log_2(x-2) < \log_2 2 - \log_2(x-4)$$

ゆえに　　$\log_2(x-2)+\log_2(x-4) < \log_2 2$

よって　　$\log_2(x-2)(x-4) < \log_2 2$

底 2 は 1 より大きいから　　$(x-2)(x-4) < 2$

ゆえに　　$x^2-6x+6<0$　　よって　　$3-\sqrt{3} < x < 3+\sqrt{3}$

$x>4$ との共通範囲を求めて　　$4 < x < 3+\sqrt{3}$

(3)　真数は正であるから　　$x>0$　……①

$\log_2 4x = 2+\log_2 x$ であるから，不等式は　　$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 > 0$

ゆえに　　$(\log_2 x + 1)(\log_2 x - 2) > 0$

よって　　$\log_2 x < -1$，$2 < \log_2 x$

したがって　　$\log_2 x < \log_2 \dfrac{1}{2}$，$\log_2 4 < \log_2 x$

底 2 は 1 より大きいことと，① から　　$0 < x < \dfrac{1}{2}$，$4 < x$

$\boxed{2}$

解説

(1)　$xy=10^5$，$10 \leqq x \leqq 1000$ のとき，$y>0$ となる。

10 を底として，$xy=10^5$，$10 \leqq x \leqq 1000$ の各辺の対数をとると

$\log_{10} x + \log_{10} y = 5$　……①，$1 \leqq \log_{10} x \leqq 3$　……②

① から　　$\log_{10} y = 5 - \log_{10} x$

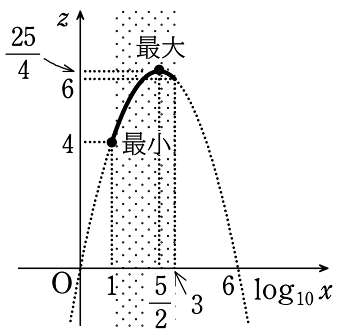
よって　　$z=(\log_{10} x)(5-\log_{10} x) = -(\log_{10} x)^2 + 5\log_{10} x$

$$= -\left(\log_{10} x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$$

② の範囲において，z は

$\log_{10}x=\dfrac{5}{2}$ で最大値 $\dfrac{25}{4}$，

$\log_{10}x=1$ で最小値 4 をとる。



$\log_{10}x=\dfrac{5}{2}$ のとき　　$x=10^{\frac{5}{2}}=100\sqrt{10}$

このとき　　$y=100\sqrt{10}$

$\log_{10}x=1$ のとき　　$x=10$

このとき　　$y=10000$

よって　　$x=100\sqrt{10}$，$y=100\sqrt{10}$ で最大値 $\dfrac{25}{4}$，$x=10$，$y=10000$ で最小値 4

(2)　$2x+3y=12$ から　　$y=-\dfrac{2}{3}x+4$　……①

$y>0$ から　　$-\dfrac{2}{3}x+4>0$　　　よって　　$x<6$

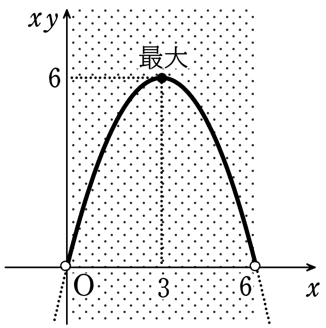
$x>0$ と合わせて　　$0<x<6$　……②

また　　$z=\log_6 x+\log_6 y=\log_6 xy$

底 6 は 1 より大きいから，xy が最大のとき，z は最大になる。

① から　　$xy=x\left(-\dfrac{2}{3}x+4\right)=-\dfrac{2}{3}(x^2-6x)$

$=-\dfrac{2}{3}(x-3)^2+6$



② の範囲において，xy は $x=3$ で最大値 6 をとる。

① から，$x=3$ のとき　　$y=2$

したがって，z は

$x=3$，$y=2$ で最大値 $\log_6 6=1$ をとる。

別解　$z=\log_6 x+\log_6 y=\log_6 xy$

$x>0$，$y>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$12=2x+3y\geqq 2\sqrt{2x\cdot 3y}=2\sqrt{6xy}$

よって　　$\sqrt{xy}\leqq\sqrt{6}$　　　ゆえに　　$xy\leqq 6$

等号は $2x=3y$ のとき成り立つ。

$2x+3y=12$ と $2x=3y$ を連立して解くと　　$x=3$，$y=2$

底 6 は 1 より大きいから，z は $x=3$，$y=2$ で最大値 $\log_6 6=1$ をとる。

3

解説

(ア)　$\log_{10}15^{10}=10\log_{10}15=10\log_{10}(3\cdot 5)=10(\log_{10}3+\log_{10}5)$

$=10(\log_{10}3+1-\log_{10}2)$

$=10(0.4771+1-0.3010)=11.761$

ゆえに　　$11<\log_{10}15^{10}<12$　　　よって　　$10^{11}<15^{10}<10^{12}$

したがって，15^{10} は 12 桁の整数である。

(イ)　$\log_{10}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{100}=100\log_{10}\dfrac{3}{5}=100(\log_{10}3-\log_{10}5)$

$=100\{\log_{10}3-(1-\log_{10}2)\}=100(\log_{10}2+\log_{10}3-1)$

$=100(0.3010+0.4771-1)=-22.19$

ゆえに　　$-23<\log_{10}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{100}<-22$

よって　　$10^{-23}<\left(\dfrac{3}{5}\right)^{100}<10^{-22}$

したがって，小数第 23 位に初めて 0 でない数字が現れる。

別解　(ア)　$15^{10}=(3\cdot 5)^{10}=(10^{0.4771}\cdot 10^{0.6990})^{10}=10^{(0.4771+0.6990)\times 10}=10^{11.761}$

ゆえに　　$10^{11}<15^{10}<10^{12}$　　　よって，12 桁の整数。

(イ)　$\left(\dfrac{3}{5}\right)^{100}=\left(\dfrac{10^{0.4771}}{10^{0.6990}}\right)^{100}=10^{(0.4771-0.6990)\times 100}=10^{-22.19}$

ゆえに　　$10^{-23}<\left(\dfrac{3}{5}\right)^{100}<10^{-22}$　　　よって，小数第 23 位。

4

解説

すべての自然数 n について，次の事柄を証明すればよい。

「$5^{n+1}+6^{2n-1}$ は 31 の倍数である」　……①

[1]　$n=1$ のとき　　$5^{n+1}+6^{2n-1}=5^2+6^1=25+6=31$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると，m を整数として

$$5^{k+1}+6^{2k-1}=31m$$

と表される。$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}5^{(k+1)+1}+6^{2(k+1)-1}&=5^{k+2}+6^{2k+1}=5\cdot5^{k+1}+36\cdot6^{2k-1}\\&=5\cdot5^{k+1}+(5\cdot6^{2k-1}+31\cdot6^{2k-1})\\&=5(5^{k+1}+6^{2k-1})+31\cdot6^{2k-1}\\&=5\cdot31m+31\cdot6^{2k-1}\\&=31(5m+6^{2k-1})\end{aligned}$$

$5m+6^{2k-1}$ は整数であるから，$5^{(k+1)+1}+6^{2(k+1)-1}$ は 31 の倍数となり，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

$\boxed{5}$

(解説)

[1]　$n=3$ のとき　　(左辺)$=3^2=9$，(右辺)$=3^2-3+2=8$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k\,(k\geqq3)$ のとき，① が成り立つと仮定すると　　$3^{k-1}>k^2-k+2$　……②

$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② から

$$\begin{aligned}3^k-\{(k+1)^2-(k+1)+2\}&=3\cdot3^{k-1}-(k^2+k+2)\\&>3(k^2-k+2)-(k^2+k+2)\\&=2k^2-4k+4=2(k-1)^2+2>0\end{aligned}$$

ゆえに　　$3^k>(k+1)^2-(k+1)+2$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，$n\geqq3$ であるすべての自然数 n について ① は成り立つ。

$\boxed{6}$

(解説)

すべての自然数 n について，次の事柄を証明すればよい。

「$x+y=p$，$xy=q$ (p，q は整数の定数) のとき，x^n+y^n は整数である」　……①

[1]　$n=1$ のとき　　$x+y=p$

$n=2$ のとき　　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=p^2-2q$

p と p^2-2q は整数であるから，$n=1$，2 のとき，① は成り立つ。

[2]　$n=k-1$，k (k は自然数，$k\geqq2$) のとき ① が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}x^{k+1}+y^{k+1}&=(x^k+y^k)(x+y)-xy(x^{k-1}+y^{k-1})\\&=(x^k+y^k)p-q(x^{k-1}+y^{k-1})\end{aligned}$$

仮定より x^k+y^k，$x^{k-1}+y^{k-1}$ は整数であるから，$x^{k+1}+y^{k+1}$ も整数である。

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について x^n+y^n は整数である。

$\boxed{7}$

(解説)

$a_1=1>0$ で，$a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$ (>0) であるから，すべての自然数 n に対して $a_n>0$ である。よって，$a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$ の両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2\sqrt{a_n}\qquad \text{ゆえに}\qquad \log_2 a_{n+1}=1+\frac{1}{2}\log_2 a_n$$

$\log_2 a_n=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=1+\dfrac{1}{2}b_n$　　これを変形して　　$b_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(b_n-2)$

ここで　　$b_1-2=\log_2 1-2=-2$

よって，数列 $\{b_n-2\}$ は初項 -2，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列で

$$b_n-2=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad \text{すなわち}\quad b_n=2-2^{2-n}$$

したがって，$\log_2 a_n=2-2^{2-n}$ から　　$a_n=2^{2-2^{2-n}}$

$\boxed{8}$

(解説)

(1)　$1.5=\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}\log_3 3=\log_3 3^{\frac{3}{2}}$　　また　$\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^2=3^3=27>5^2$

底 3 は 1 より大きく，$3^{\frac{3}{2}}>5$ であるから　　$\log_3 3^{\frac{3}{2}}>\log_3 5$

したがって　　$1.5>\log_3 5$

(2)　$2=2\log_2 2=\log_2 2^2=\log_2 4$，$\log_4 9=\dfrac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2}=\log_2 3$

底 2 は 1 より大きく，$3<4<5$ であるから

$\log_2 3<\log_2 4<\log_2 5$　すなわち　$\log_4 9<2<\log_2 5$

(3)　底 0.5 は 1 より小さく，$3>2>1$ であるから

$$\log_{0.5} 3<\log_{0.5} 2<0$$

$\log_3 2=\dfrac{1}{\log_2 3}$，$\log_5 2=\dfrac{1}{\log_2 5}$ で，底 2 は 1 より大きく，$1<3<5$ であるから

$$0<\log_2 3<\log_2 5$$

よって　$0<\dfrac{1}{\log_2 5}<\dfrac{1}{\log_2 3}$　すなわち　$0<\log_5 2<\log_3 2$

したがって　$\log_{0.5} 3<\log_{0.5} 2<\log_5 2<\log_3 2$

$\boxed{9}$

(解説)

$\log_2 10=\log_2(2\cdot 5)=1+\log_2 5$

ここで　$\log_2 5=\dfrac{\log_3 5}{\log_3 2}=\log_2 3\cdot\log_3 5=ab$

よって　$\log_2 10=1+ab$

また　$\log_{15} 40=\dfrac{\log_2 40}{\log_2 15}=\dfrac{\log_2(2^3\cdot 5)}{\log_2(3\cdot 5)}=\dfrac{3+\log_2 5}{\log_2 3+\log_2 5}=\dfrac{3+ab}{a+ab}$