【定期試験対策講習】

３学期
学年末考査
対策教材①

中２女学院数学

【注意事項】

本教材は

数学Ⅰ「2 次関数」の最大・最小
数学 A「整数」の前半

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=2x^2+3x+1\ \left(-\dfrac{1}{2}\leqq x<\dfrac{1}{2}\right)$　　(2)　$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+\dfrac{3}{2}\ (1\leqq x\leqq 5)$

$\boxed{2}$

関数 $y=ax^2-2ax+b\ (0\leqq x\leqq 3)$ の最大値が 9，最小値が 1 であるように，定数 a，b の値を定めよ。

$\boxed{3}$

a は定数とする。関数 $y=x^2-4x+1\ (a\leqq x\leqq a+1)$ について

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

$\boxed{4}$

(1)　$x+2y=3$ のとき，$2x^2+y^2$ の最小値を求めよ。

(2)　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$2x+y=8$ のとき，xy の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{5}$

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 $(-1,\ 3)$ で，点 $(-2,\ 7)$ を通る。

(2)　3 点 $(-1,\ -6)$，$(1,\ -2)$，$(3,\ 10)$ を通る。

$\boxed{6}$

$\sqrt{\dfrac{756}{n}}$ が自然数になるような自然数 n をすべて求めよ。

$\boxed{7}$

20 の倍数で，正の約数の個数が 15 個である自然数 n をすべて求めよ。

$\boxed{8}$

次のような条件を満たす 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

(1)　和が 160，最大公約数が 8　　(2)　積が 300，最小公倍数が 60

$\boxed{9}$

2 つの自然数 a と b が互いに素であるとき，a と $a+b$ も互いに素であることを証明せよ。

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答　(1)　$x=-\dfrac{1}{2}$ で最小値 0，最大値はない

(2)　$x=2$ で最大値 $\dfrac{7}{2}$，$x=5$ で最小値 -1

$\boxed{2}$

解答　$a=2$，$b=3$ または $a=-2$，$b=7$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$a<1$ のとき　$x=a+1$ で最小値 a^2-2a-2，
$1\leqq a\leqq 2$ のとき　$x=2$ で最小値 -3，
$2<a$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2-4a+1

(2)　$a<\dfrac{3}{2}$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-4a+1，

$a=\dfrac{3}{2}$ のとき　$x=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2}$ で最大値 $-\dfrac{11}{4}$，

$a>\dfrac{3}{2}$ のとき　$x=a+1$ で最大値 a^2-2a-2

$\boxed{4}$

解答　(1)　$x=\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{4}{3}$ のとき最小値 2

(2)　$(x,\ y)=(2,\ 4)$ のとき最大値 8；$(x,\ y)=(0,\ 8)$，$(4,\ 0)$ のとき最小値 0

$\boxed{5}$

解答　(1)　$y=4(x+1)^2+3$　$(y=4x^2+8x+7)$　　(2)　$y=x^2+2x-5$

$\boxed{6}$

解答　$n=21$，84，189，756

$\boxed{7}$

解答　$n=400$，2500

$\boxed{8}$

解答　(1)　$(a,\ b)=(8,\ 152)$，$(24,\ 136)$，$(56,\ 104)$，$(72,\ 88)$

(2)　$(a,\ b)=(5,\ 60)$，$(15,\ 20)$

$\boxed{9}$

解答　略

$\boxed{1}$

解説

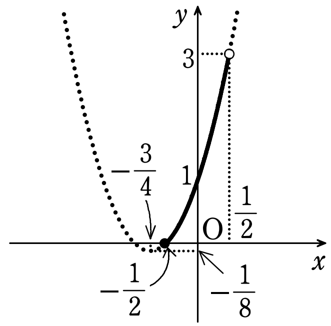
(1)　$y=2x^2+3x+1$

$=2\left\{x^2+\dfrac{3}{2}x+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right\}-2\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+1$

$=2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$

また　$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$y=0$

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき　$y=3$



よって，与えられた関数のグラフは図の実線部分である。

ゆえに　$x=-\dfrac{1}{2}$ で最小値 0，最大値はない。

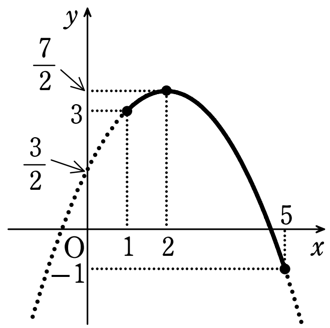
(2)　$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+\dfrac{3}{2}$

$=-\dfrac{1}{2}(x^2-4x+2^2)+\dfrac{1}{2}\cdot2^2+\dfrac{3}{2}$

$=-\dfrac{1}{2}(x-2)^2+\dfrac{7}{2}$

また　$x=1$ のとき　$y=3$
$x=5$ のとき　$y=-1$

よって，与えられた関数のグラフは図の実線部分である。



ゆえに　$x=2$ で最大値 $\dfrac{7}{2}$，$x=5$ で最小値 -1

$\boxed{2}$

解説

関数の式を変形すると　$y=a(x-1)^2-a+b$ $(0\leqq x\leqq 3)$

[1]　$a>0$ のとき

この関数は

$x=3$ で最大値 $3a+b$,

$x=1$ で最小値 $-a+b$　をとる。

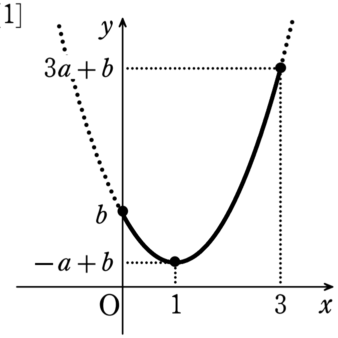
最大値が 9，最小値が 1 であるとき

$3a+b=9$，$-a+b=1$

これを解いて　$a=2$，$b=3$

これは $a>0$ を満たす。

[1]



[2]　$a=0$ のとき

この関数は $y=b$ $(0\leqq x\leqq 3)$ となり，条件を満たさない。

[3]　$a<0$ のとき

この関数は

$x=1$ で最大値 $-a+b$,

$x=3$ で最小値 $3a+b$　をとる。

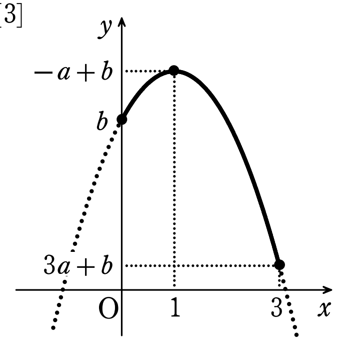
最大値が 9，最小値が 1 であるとき

$-a+b=9$，$3a+b=1$

これを解いて　$a=-2$，$b=7$

これは $a<0$ を満たす。

[3]



[1]〜[3] から

$a=2$，$b=3$ または $a=-2$，$b=7$

$\boxed{3}$

解説

関数の式を変形すると　$y=(x-2)^2-3$ $(a\leqq x\leqq a+1)$

また　$x=a$ のとき　$y=a^2-4a+1$,　$x=a+1$ のとき　$y=a^2-2a-2$,

$x=2$ のとき　$y=-3$

(1)　[1]　$a+1<2$ すなわち $a<1$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　$x=a+1$ で最小値 a^2-2a-2

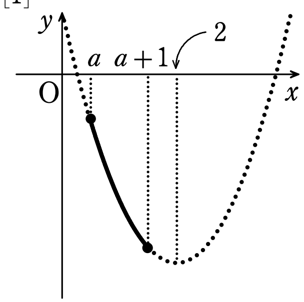
[2]　$a\leqq 2\leqq a+1$ すなわち $1\leqq a\leqq 2$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　$x=2$ で最小値 -3

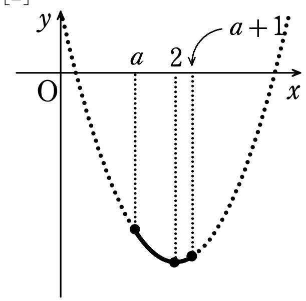
[3]　$2<a$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　$x=a$ で最小値 a^2-4a+1

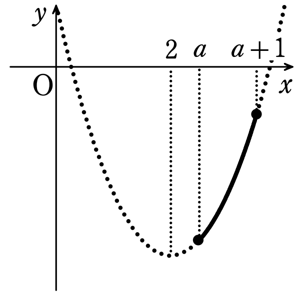
[1]



[2]



[3]



(2)　定義域の中央の値は $a+\dfrac{1}{2}$

[1]　$a+\dfrac{1}{2}<2$ すなわち $a<\dfrac{3}{2}$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　$x=a$ で最大値 a^2-4a+1

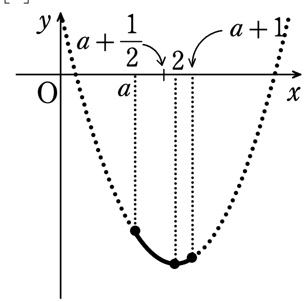
[2]　$a+\dfrac{1}{2}=2$ すなわち $a=\dfrac{3}{2}$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　$x=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2}$ で最大値 $-\dfrac{11}{4}$

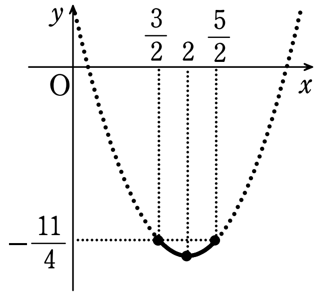
[3]　$a+\dfrac{1}{2}>2$ すなわち $a>\dfrac{3}{2}$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　$x=a+1$ で最大値 a^2-2a-2

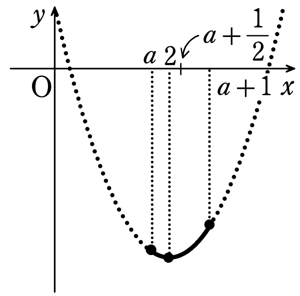
[1]



[2]



[3]



4

(解説)

(1)　$x+2y=3$ から　　$x=-2y+3$　…… ①

ゆえに　　$2x^2+y^2=2(-2y+3)^2+y^2=9y^2-24y+18$

$$=9\left\{y^2-\frac{8}{3}y+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right\}-9\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2+18$$

$$=9\left(y-\frac{4}{3}\right)^2+2$$

よって，$y=\frac{4}{3}$ で最小値 2 をとる。

このとき，① から　　$x=-2\cdot\frac{4}{3}+3=\frac{1}{3}$

したがって　　$x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{4}{3}$ のとき最小値 2

(2)　$2x+y=8$ から　　$y=-2x+8$　…… ①

$y\geqq 0$ であるから　　$-2x+8\geqq 0$　　　ゆえに　　$x\leqq 4$

$x\geqq 0$ との共通範囲は　　$0\leqq x\leqq 4$　…… ②

また　　$xy=x(-2x+8)=-2x^2+8x$

$$=-2(x^2-4x+2^2)+2\cdot 2^2$$

$$=-2(x-2)^2+8$$

② の範囲において，xy は，$x=2$ で 最大値 8 をとり，$x=0$，4 で 最小値 0 をとる。

① から，x の値に対応した y の値を求めて

$(x,\ y)=(2,\ 4)$ のとき最大値 8

$(x,\ y)=(0,\ 8)$，$(4,\ 0)$ のとき最小値 0

5

(解説)

(1)　頂点が点 $(-1,\ 3)$ であるから，求める 2 次関数は $y=a(x+1)^2+3$ と表される。

このグラフが点 $(-2,\ 7)$ を通るから

$7=a(-2+1)^2+3$　　　　ゆえに　$a=4$

よって，求める 2 次関数は　　$y=4(x+1)^2+3$　　(または $y=4x^2+8x+7$)

(2)　求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

このグラフが 3 点 $(-1,\ -6)$，$(1,\ -2)$，$(3,\ 10)$ を通るから

$$\begin{cases} a-b+c=-6 & \cdots\cdots ① \\ a+b+c=-2 & \cdots\cdots ② \\ 9a+3b+c=10 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②−① から　　$2b=4$　　　　よって　$b=2$

③−② から　　$8a+2b=12$　　　　よって　$4a+b=6$　…… ④

$b=2$ を ④ に代入して　　$4a+2=6$　　　ゆえに　$a=1$

$a=1$，$b=2$ を ② に代入して　　$1+2+c=-2$　　　ゆえに　$c=-5$

よって，求める 2 次関数は　　$y=x^2+2x-5$

6

(解説)

$\sqrt{\frac{756}{n}}$ が自然数になるのは，$\frac{756}{n}$ がある自然数の 2 乗になるときである。

756 を素因数分解すると　　$756=2^2\cdot 3^3\cdot 7$

$2^2\cdot 3^3\cdot 7$ を $3\cdot 7=21$ で割ると　$2^2\cdot 3^2$　すなわち $(2\cdot 3)^2$

$3^3\cdot 7=189$ で割ると　2^2

$2^2\cdot 3\cdot 7=84$ で割ると　3^2

756 で割ると　1^2

よって，求める自然数 n は　　$n=21$，84，189，756

7

(解説)

15 を素因数分解すると　　$15=3\cdot 5$

よって，正の約数の個数が 15 個である自然数 n を素因数分解すると，

p^{14}，p^2q^4　(p，q は異なる素数)

のどちらかの形で表される。

n は 20 の倍数であり，$20=2^2\cdot 5$ であるから，n は p^2q^4 の形で表される。

したがって，求める自然数 n は

$n=2^2\cdot 5^4$，$5^2\cdot 2^4$　すなわち　$n=400$，2500

$\boxed{8}$

(解説)

(1)　最大公約数が 8 であるから，a，b は

$$a=8a',\ b=8b'$$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

$a+b=160$ であるから

$$8a'+8b'=160 \quad すなわち \quad a'+b'=20$$

$a'+b'=20$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$$(a',\ b')=(1,\ 19),\ (3,\ 17),\ (7,\ 13),\ (9,\ 11)$$

よって　$(a,\ b)=(8,\ 152),\ (24,\ 136),\ (56,\ 104),\ (72,\ 88)$

(2)　最大公約数を g とすると，a，b は

$$a=ga',\ b=gb'$$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a，b の積と最大公約数，最小公倍数の積は等しいから

$$300=g\cdot 60 \qquad よって \quad g=5$$

最小公倍数が 60 であるから

$$ga'b'=60 \quad すなわち \quad 5a'b'=60$$

よって　$a'b'=12$

$a'b'=12$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$$(a',\ b')=(1,\ 12),\ (3,\ 4)$$

したがって　$(a,\ b)=(5,\ 60),\ (15,\ 20)$

$\boxed{9}$

(解説)

a と $a+b$ の最大公約数を g とすると，

$$a=gm,\quad a+b=gn$$

と表される。ただし，m，n は互いに素である自然数で，$m<n$ である。

よって　$b=gn-a=gn-gm=g(n-m)$

ここで，$n-m$ は自然数であるから，g は b の約数となる。

g は a の約数でもあるから，g は a と b の公約数であるが，a と b は互いに素であるから，$g=1$ となる。

したがって，2 つの自然数 a と b が互いに素であるとき，a と $a+b$ も互いに素である。

別解　[背理法を用いた証明]

a と $a+b$ が互いに素でないと仮定すると，a と $a+b$ は 1 より大きい公約数をもつ。

その公約数を k とすると

$$a=km,\ a+b=kn \quad (k,\ m,\ n は自然数で\ k>1,\ m<n)$$

と表される。

このとき　$b=kn-a=kn-km=k(n-m)$

よって，a と b は 1 より大きい公約数 k をもつから，a と b が互いに素であることに矛盾する。

したがって，2 つの自然数 a と b が互いに素であるとき，a と $a+b$ も互いに素である。