【定期試験対策講習】

３学期
学年末考査
対策教材②

中３六甲数学

【注意事項】

本教材は

数学 A「整数」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

$\sqrt{\dfrac{756}{n}}$ が自然数になるような自然数 n をすべて求めよ。

$\boxed{2}$

20 の倍数で，正の約数の個数が 15 個である自然数 n をすべて求めよ。

$\boxed{3}$

次のような条件を満たす 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

(1)　和が 160，最大公約数が 8　　(2)　積が 300，最小公倍数が 60

$\boxed{4}$

2 つの整数 767，221 の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。

$\boxed{5}$

等式 $19x+26y=1$ を満たす整数 x，y の組を互除法を用いて 1 つ求めよ。

$\boxed{6}$

方程式 $9x+5y=1$ の整数解をすべて求めよ。

$\boxed{7}$

n は自然数とする。n^2+3n+8 と $n+2$ の最大公約数として考えられる数をすべて求めよ。

$\boxed{8}$

$xy-2x+4y+1=0$ を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。

$\boxed{9}$

次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \quad (x \leqq y \leqq z)$$

$\boxed{10}$

次の方程式を満たす整数 x，y を求めよ。

(1)　$2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-5=0$

(2)　$x^2-2xy+2y^2-2x-3y+5=0$

$\boxed{11}$

次の合同式を満たす x を，それぞれの法 m において，$x \equiv a \pmod{m}$ の形で表せ。ただし，a は m より小さい自然数とする。

(1)　$7x \equiv 3 \pmod{5}$　　(2)　$5x \equiv 15 \pmod{13}$　　(3)　$4x \equiv 8 \pmod{12}$

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答　$n=21,\ 84,\ 189,\ 756$

$\boxed{2}$

解答　$n=400,\ 2500$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$(a,\ b)=(8,\ 152),\ (24,\ 136),\ (56,\ 104),\ (72,\ 88)$

(2)　$(a,\ b)=(5,\ 60),\ (15,\ 20)$

$\boxed{4}$

解答　13

$\boxed{5}$

解答　$x=11,\ y=-8$

$\boxed{6}$

解答　$x=5k-1,\ y=-9k+2$ (k は整数)

$\boxed{7}$

解答　1，2，3，6

$\boxed{8}$

解答　$(x,\ y)=(-13,\ 3),\ (-7,\ 5),\ (-5,\ 11),\ (-3,\ -7),\ (-1,\ -1),\ (5,\ 1)$

$\boxed{9}$

解答　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

$\boxed{10}$

解答　(1)　$(x,\ y)=(-1,\ 0),\ (1,\ 2)$　　(2)　$(x,\ y)=(2,\ 1),\ (5,\ 4)$

$\boxed{11}$

解答　(1)　$x\equiv4\ (\mathrm{mod}\ 5)$　　(2)　$x\equiv3\ (\mathrm{mod}\ 13)$　　(3)　$x\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 3)$

$\boxed{1}$

解説

$\sqrt{\dfrac{756}{n}}$ が自然数になるのは，$\dfrac{756}{n}$ がある自然数の 2 乗になるときである。

756 を素因数分解すると　　$756=2^2\cdot3^3\cdot7$

$2^2\cdot3^3\cdot7$ を $3\cdot7=21$ で割ると　$2^2\cdot3^2$　すなわち $(2\cdot3)^2$

$3^3\cdot7=189$ で割ると　2^2

$2^2\cdot3\cdot7=84$ で割ると　3^2

756 で割ると　1^2

よって，求める自然数 n は　　$n=21,\ 84,\ 189,\ 756$

$\boxed{2}$

解説

15 を素因数分解すると　　$15=3\cdot5$

よって，正の約数の個数が 15 個である自然数 n を素因数分解すると，

p^{14}，p^2q^4　(p，q は異なる素数)

のどちらかの形で表される。

n は 20 の倍数であり，$20=2^2\cdot5$ であるから，n は p^2q^4 の形で表される。

したがって，求める自然数 n は

$n=2^2\cdot5^4,\ 5^2\cdot2^4$　すなわち　$n=400,\ 2500$

$\boxed{3}$

解説

(1)　最大公約数が 8 であるから，a，b は

$$a=8a',\ b=8b'$$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

$a+b=160$ であるから

$$8a'+8b'=160\quad すなわち\quad a'+b'=20$$

$a'+b'=20$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$$(a',\ b')=(1,\ 19),\ (3,\ 17),\ (7,\ 13),\ (9,\ 11)$$

よって　　$(a,\ b)=(8,\ 152),\ (24,\ 136),\ (56,\ 104),\ (72,\ 88)$

(2)　最大公約数を g とすると，a，b は

$$a=ga',\ b=gb'$$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a，b の積と最大公約数，最小公倍数の積は等しいから

$300=g\cdot 60$　　よって　$g=5$

最小公倍数が 60 であるから

$ga'b'=60$　すなわち　$5a'b'=60$

よって　$a'b'=12$

$a'b'=12$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 12),\ (3,\ 4)$

したがって　$(a,\ b)=(5,\ 60),\ (15,\ 20)$

$\boxed{4}$

（解説）

$767=221\cdot 3+104$

$221=104\cdot 2+13$

$104=13\cdot 8+0$

よって，最大公約数は　13

$$\begin{array}{rrrr} & 8 & 2 & 3 \\ 13) & 104 &)\,221 &)\,767 \\ & 104 & 208 & 663 \\ \hline & 0 & 13 & 104 \end{array}$$

$\boxed{5}$

（解説）

$26=19\cdot 1+7$　移項すると　$7=26-19\cdot 1$

$19=7\cdot 2+5$　移項すると　$5=19-7\cdot 2$

$7=5\cdot 1+2$　移項すると　$2=7-5\cdot 1$

$5=2\cdot 2+1$　移項すると　$1=5-2\cdot 2$

よって　$1=5-2\cdot 2=5-(7-5\cdot 1)\cdot 2$

$=5\cdot 3-7\cdot 2=(19-7\cdot 2)\cdot 3-7\cdot 2$

$=19\cdot 3+7\cdot(-8)=19\cdot 3+(26-19\cdot 1)\cdot(-8)$

$=19\cdot 11+26\cdot(-8)$

すなわち　$19\cdot 11+26\cdot(-8)=1$　…… ①

したがって，求める整数 x，y の組の 1 つは

$x=11$，$y=-8$

$\boxed{6}$

（解説）

$9x+5y=1$　…… ①

$x=-1$，$y=2$ は ① の整数解の 1 つである。

よって　$9\cdot(-1)+5\cdot 2=1$　…… ②

①−② から　$9(x+1)+5(y-2)=0$

すなわち　$9(x+1)=-5(y-2)$　…… ③

9 と 5 は互いに素であるから，$x+1$ は 5 の倍数である。

ゆえに，k を整数として，$x+1=5k$ と表される。

③ に代入して　$9\cdot 5k=-5(y-2)$　すなわち　$y-2=-9k$

よって，解は　$x=5k-1$，$y=-9k+2$（k は整数）

$\boxed{7}$

（解説）

$n^2+3n+8=(n+2)(n+1)-2+8$

$=(n+2)(n+1)+6$

よって，n^2+3n+8 と $n+2$ の最大公約数は，$n+2$ と 6 の最大公約数に等しい。

したがって，最大公約数として考えられる数は，6 の正の約数の 1，2，3，6 である。

$\boxed{8}$

（解説）

$xy-2x+4y+1=0$ から　$(x+4)(y-2)+8+1=0$

すなわち　$(x+4)(y-2)=-9$

x，y は整数であるから，$x+4$，$y-2$ も整数である。

よって　$(x+4,\ y-2)=(-9,\ 1),\ (-3,\ 3),\ (-1,\ 9),\ (1,\ -9),\ (3,\ -3),$
$(9,\ -1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(-13,\ 3),\ (-7,\ 5),\ (-5,\ 11),\ (-3,\ -7),\ (-1,\ -1),\ (5,\ 1)$

$\boxed{9}$

（解説）

$0<x\leqq y\leqq z$ であるから　$\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{x}$　…… ①

よって　$1=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x}$

すなわち　$1\leqq\dfrac{3}{x}$　　ゆえに　$x\leqq 3$

x は自然数であるから　$x=1,\ 2,\ 3$

[1]　$x=1$ のとき　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$

これを満たす自然数 y，z の組はない。

[2]　$x=2$ のとき　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$　……②

ここで，① から　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}$

よって　$\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{2}{y}$　　ゆえに　$y\leqq 4$

y は自然数で，$2=x\leqq y$ であるから　$y=2,\ 3,\ 4$

$y=2$ のとき，② から　$\dfrac{1}{z}=0$　　これを満たす自然数 z はない。

$y=3$ のとき，② から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{6}$　　よって　$z=6$　(これは適する)

$y=4$ のとき，② から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$　　よって　$z=4$　(これは適する)

[3]　$x=3$ のとき　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}$　……③

$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{2}{y}$ であるから　$\dfrac{2}{3}\leqq\dfrac{2}{y}$　　ゆえに　$y\leqq 3$

y は自然数で，$3=x\leqq y$ であるから　$y=3$

このとき，③ から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}$　　よって　$z=3$　(これは適する)

以上から　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

$\boxed{10}$

解説

(1)　$(2x-y+a)(x+2y+b)=2x^2+3xy-2y^2+(a+2b)x+(2a-b)y+ab$

となり，$a+2b=-3$，$2a-b=4$ を解くと

$a=1,\ b=-2$

ゆえに　$(2x-y+1)(x+2y-2)=2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-2$

$2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-5=0$ を変形すると

$(2x-y+1)(x+2y-2)-3=0$

よって　$(x+2y-2)(2x-y+1)=3$

x，y は整数であるから，$x+2y-2$，$2x-y+1$ も整数である。

したがって　$\begin{cases}x+2y-2=-3\\2x-y+1=-1\end{cases}$　$\begin{cases}x+2y-2=-1\\2x-y+1=-3\end{cases}$

$\begin{cases}x+2y-2=1\\2x-y+1=3\end{cases}$　$\begin{cases}x+2y-2=3\\2x-y+1=1\end{cases}$

これらの連立方程式の解は，順に

$(x,\ y)=(-1,\ 0),\ \left(-\dfrac{7}{5},\ \dfrac{6}{5}\right),\ \left(\dfrac{7}{5},\ \dfrac{4}{5}\right),\ (1,\ 2)$

x，y がともに整数であるものは

$(x,\ y)=(-1,\ 0),\ (1,\ 2)$

(2)　$x^2-2xy+2y^2-2x-3y+5=0$ を x について整理すると

$x^2-2(y+1)x+2y^2-3y+5=0$　……①

① を x について解くと

$$\begin{aligned}x&=y+1\pm\sqrt{(y+1)^2-(2y^2-3y+5)}\\&=y+1\pm\sqrt{-y^2+5y-4}\end{aligned}$$　……②

② は実数であるから

$-y^2+5y-4\geqq 0$

よって　$-(y-1)(y-4)\geqq 0$　　ゆえに　$1\leqq y\leqq 4$

y は整数であるから　$y=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$y=1$ のとき，① は　$x^2-4x+4=0$

よって　$(x-2)^2=0$　　ゆえに　$x=2$

$y=2$ のとき，① は　$x^2-6x+7=0$

これを解いて　$x=3\pm\sqrt{2}$

$y=3$ のとき，① は　$x^2-8x+14=0$

これを解いて　$x=4\pm\sqrt{2}$

$y=4$ のとき，① は　$x^2-10x+25=0$

よって　$(x-5)^2=0$　　ゆえに　$x=5$

x，y がともに整数であるものは

$(x,\ y)=(2,\ 1),\ (5,\ 4)$

$\boxed{11}$

(解説)

(1)　$7x \equiv 3 \pmod{5}$ の両辺に 3 を掛けて　　$21x \equiv 9 \pmod{5}$

$21x \equiv 1 \cdot x \equiv x \pmod{5}$，$9 \equiv 4 \pmod{5}$ であるから　　$x \equiv 4 \pmod{5}$

(2)　$5x \equiv 15 \pmod{13} \iff 5x-15=13k$ (kは整数) $\iff 5(x-3)=13k$

5と13は互いに素な自然数であるので，$x-3=13l$ (l は整数)

$\therefore \quad x \equiv 3 \pmod{13}$

(3)　$4x \equiv 8 \pmod{12} \iff 4x-8=12k$ (kは整数) $\iff x-2=3k$

$\therefore \quad x \equiv 2 \pmod{3}$