【定期試験対策講習】

１学期
中間考査
対策教材①

中２甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｋ「場合の数」前半
数学Ｍ「三角比」前半

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

100から200までの整数のうち，次の整数の個数を求めよ。

(1) 5かつ8の倍数　　(2) 5または8の倍数

(3) 5で割り切れるが8で割り切れない整数

(4) 5と8の少なくとも一方で割り切れない整数

$\boxed{2}$

デパートに来た客100人の買い物調査をしたところ，A商品を買った人は80人，B商品を買った人は70人であった。両方とも買った人数のとりうる最大値は ア$\boxed{}$ で，最小値は イ$\boxed{}$ である。また，両方とも買わなかった人数のとりうる最大値は ウ$\boxed{}$ で，最小値は エ$\boxed{}$ である。

$\boxed{3}$

100人のうち，A市，B市，C市に行ったことのある人の集合を，それぞれ A，B，C で表し，集合 A の要素の個数を $n(A)$ で表すと，次の通りであった。

$$n(A)=50,\quad n(B)=13,\quad n(C)=30,\quad n(A\cap C)=9,$$
$$n(B\cap C)=10,\quad n(A\cap B\cap C)=3,\quad n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=28$$

(1) A市とB市に行ったことのある人は何人か。

(2) A市だけに行ったことのある人は何人か。

$\boxed{4}$

(1) 大小2個のさいころを投げるとき，出る目の和が10以上になる場合は何通りあるか。

(2) $(a+b)(p+2q)(x+2y+3z)$ を展開すると，異なる項は何個できるか。

$\boxed{5}$

5400の正の約数は全部で何個あるか。また，その約数の和を求めよ。

$\boxed{6}$

大，中，小3個のさいころを投げるとき，目の積が4の倍数になる場合は何通りあるか。

$\boxed{7}$

6個の数字0，1，2，3，4，5から，異なる数字を使って3桁の数を作る。

(1) 奇数は何個できるか。　　(2) 偶数は何個できるか。

(3) 340より大きい数は何個できるか。

(4) 小さい方から順に並べると，43番目の数は何か。

$\boxed{8}$

男子4人，女子5人が1列に並ぶとき，次の並び方は何通りあるか。

(1) 女子5人が続いて並ぶ

(2) 男子は男子，女子は女子で，それぞれ続いて並ぶ

(3) 両端が男子である　　(4) 男子，女子が交互に並ぶ

(5) どの男子も隣り合わない

$\boxed{9}$

両親と4人の子ども(息子2人，娘2人)が手をつないで輪を作る。

(1) 6人の並び方は全部で何通りあるか。

(2) 両親が隣り合う並び方は何通りあるか。

(3) 両親が正面に向き合う並び方は何通りあるか。

(4) 男性と女性が交互に並ぶ並び方は何通りあるか。

$\boxed{10}$

次の式の値を求めよ。

(1) $\cos(90^\circ-\theta)\sin(180^\circ-\theta)-\sin(90^\circ-\theta)\cos(180^\circ-\theta)$

(2) $\cos^2\theta+\cos^2(90^\circ-\theta)+\cos^2(90^\circ+\theta)+\cos^2(180^\circ-\theta)$

(3) $\cos 56^\circ\cos 124^\circ+\sin 56^\circ\cos 146^\circ$

(4) $\dfrac{1}{\sin^2 40^\circ}-\tan^2 130^\circ$

$\boxed{11}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(1) $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

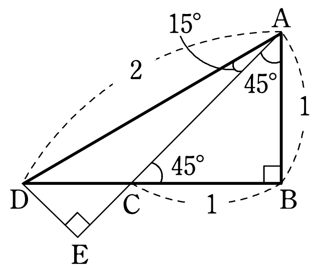
(2) $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{12}$

(1) 右の図で，線分 DE，AE の長さを求めよ。

(2) 右の図を利用して，次の値を求めよ。

$\sin 15^\circ,\quad \cos 15^\circ,\quad \tan 15^\circ$



【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答　(1)　3　　(2)　31　　(3)　18　　(4)　98

$\boxed{2}$

解答　(ア)　70　　(イ)　50　　(ウ)　20　　(エ)　0

$\boxed{3}$

解答　(1)　5 人　　(2)　39 人

$\boxed{4}$

解答　(1)　6 通り　　(2)　12 個

$\boxed{5}$

解答　順に 48 個，18600

$\boxed{6}$

解答　135 通り

$\boxed{7}$

解答　(1)　48 個　　(2)　52 個　　(3)　47 個　　(4)　304

$\boxed{8}$

解答　(1)　14400 通り　　(2)　5760 通り　　(3)　60480 通り　　(4)　2880 通り
(5)　43200 通り

$\boxed{9}$

解答　(1)　120 通り　　(2)　48 通り　　(3)　24 通り　　(4)　12 通り

$\boxed{10}$

解答　(1)　1　　(2)　2　　(3)　-1　　(4)　1

$\boxed{11}$

解答　(1)　$(\cos\theta,\ \tan\theta)=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right),\ \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

(2)　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\boxed{12}$

解答　(1)　$\mathrm{DE}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，$\mathrm{AE}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

(2)　$\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$

$\boxed{1}$

解説

100 から 200 までの整数全体の集合を U とし，そのうち 5 の倍数，8 の倍数全体の集合をそれぞれ A，B とすると

$A=\{5\cdot20,\ 5\cdot21,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot40\}$，$B=\{8\cdot13,\ 8\cdot14,\ \cdots\cdots,\ 8\cdot25\}$

ゆえに　$n(A)=40-20+1=21$，$n(B)=25-13+1=13$

(1)　5 かつ 8 の倍数すなわち 40 の倍数全体の集合は $A\cap B$ であり

$A\cap B=\{40\cdot3,\ 40\cdot4,\ 40\cdot5\}$

よって　$n(A\cap B)=3$

(2)　5 または 8 の倍数全体の集合は $A\cup B$ であるから

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=21+13-3=31$

(3)　5 で割り切れるが 8 で割り切れない整数全体の集合は $A\cap\overline{B}$ であるから

$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=21-3=18$

(4)　5 と 8 の少なくとも一方で割り切れない整数全体の集合は $\overline{A}\cup\overline{B}$ である。

また，$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$ であるから

$n(\overline{A}\cup\overline{B})=n(\overline{A\cap B})=n(U)-n(A\cap B)=(200-100+1)-3=98$

$\boxed{2}$

解説

客全体の集合を全体集合 U とし，A 商品，B 商品を買った人の集合をそれぞれ A，B とすると，条件から

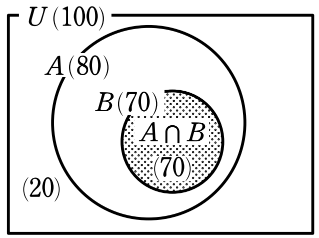
$n(U)=100$，$n(A)=80$，$n(B)=70$

両方とも買った人数は $n(A\cap B)$ で表され，$n(A\cap B)$ は，$n(A)>n(B)$ であるから，$A\supset B$ のとき最大になる。

ゆえに　$n(A\cap B)=n(B)={}^{ア}70$

また，$n(A\cap B)$ は，$A\cup B=U$ のとき最小になる。

$A\supset B$ のとき

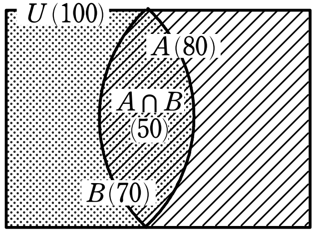


このとき　$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=n(A)+n(B)-n(U)$

$=80+70-100={}^{イ}50$

$A\cup B=U$ のとき



次に，両方とも買わなかった人数は $n(\overline{A}\cap\overline{B})$ で表され，

$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$

$=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$

$=100-80-70+n(A\cap B)$

$=n(A\cap B)-50$

したがって，$n(\overline{A}\cap\overline{B})$ が最大，最小となるのは，それぞれ $n(A\cap B)$ が最大，最小となる場合と一致する。

よって　最大値は　$70-50={}^{ウ}20$，最小値は　$50-50={}^{エ}0$

別解　(ウ)，(エ)　不等式の性質を用いて，解くこともできる。

$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(A\cap B)-50$ を導くまでは同じ。

$50\leqq n(A\cap B)\leqq 70$ であるから

$50-50\leqq n(A\cap B)-50\leqq 70-50$

よって　$0\leqq n(A\cap B)-50\leqq 20$

したがって　${}^{エ}0\leqq n(\overline{A}\cap\overline{B})\leqq {}^{ウ}20$

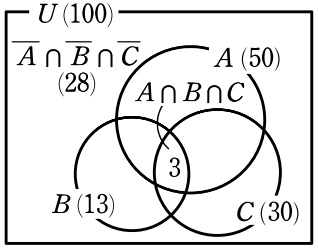
3

解説

全体集合を U とすると　$n(U)=100$

また　$n(A\cup B\cup C)=n(U)-n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$

$=100-28=72$



(1)　A 市と B 市に行ったことのある人の集合は $A\cap B$ である。

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

に代入すると　$72=50+13+30-n(A\cap B)-10-9+3$

したがって　$n(A\cap B)=5$

よって，A 市と B 市に行ったことのある人は　5 人

(2)　A 市だけに行ったことのある人の集合は $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ である。

ゆえに　$n(A\cup B\cup C)-n(B\cup C)=n(A\cup B\cup C)-\{n(B)+n(C)-n(B\cap C)\}$

$=72-(13+30-10)=39$

よって，A 市だけに行ったことのある人は　39 人

4

解説

(1)　目の和が 10 以上になるのは，和が 10 または 11 または 12 になる場合である。

[1]　和が 10 になる場合は　3 通り

[2]　和が 11 になる場合は　2 通り

[3]　和が 12 になる場合は　1 通り

[1]

大	4	5	6
小	6	5	4

[2]

大	5	6
小	6	5

[3]

大	6
小	6

これらは同時には起こらないから，求める場合の数は　$3+2+1=6$ (通り)

(2)　展開してできる項は，$(a,\ b)$，$(p,\ 2q)$，$(x,\ 2y,\ 3z)$ からそれぞれ 1 つずつ取り出して掛けて作られる。

よって，異なる項は　$2\times2\times3=12$ (個)　できる。

5

解説

$5400=2^3\cdot3^3\cdot5^2$ であるから，5400 の正の約数は，

$a=0,\ 1,\ 2,\ 3$；$b=0,\ 1,\ 2,\ 3$；$c=0,\ 1,\ 2$

として，$2^a\cdot3^b\cdot5^c$ と表される。

(約数の個数)　a の定め方は 4 通り。

そのおのおのについて，b の定め方は 4 通り。

更に，そのおのおのについて，c の定め方は 3 通りある。

よって，積の法則により　$4\times4\times3=48$ (個)

(約数の和)　5400 の正の約数は

$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2+3^3)(1+5+5^2)$

を展開した項にすべて現れる。よって，求める和は

$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2+3^3)(1+5+5^2)=15\times40\times31=18600$

6

(解説)

目の出る場合の数の総数は　$6\times6\times6=216$ (通り)

目の積が 4 の倍数にならない場合には，次の場合がある。

[1]　目の積が奇数の場合

3 つの目がすべて奇数のときで　$3\times3\times3=27$ (通り)

[2]　目の積が偶数で，4 の倍数でない場合

3 つのうち，2 つの目が奇数で，残りの 1 つは 2 または 6 の目であるから

$$(3^2\times2)\times3=54 \text{ (通り)}$$

[1]，[2] から，目の積が 4 の倍数にならない場合の数は　$27+54=81$ (通り)

よって，目の積が 4 の倍数になる場合の数は　$216-81=135$ (通り)

7

(解説)

(1)　奇数であるから，一の位は 1，3，5 の　3 通り

百の位は，0 と一の位の数字を除いた 4 個から選ぶから　4 通り

十の位は，残りの 4 個から選ぶから　4 通り

よって，求める個数は　$3\times4\times4=48$ (個)

(2)　偶数になるのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。

[1]　一の位が 0 のとき

百，十の位には，残りの 5 個から 2 個取って並べるから　${}_5P_2$ 通り

[2]　一の位が 2，4 のとき

百の位は，0 と一の位の数字を除いた 4 個から選ぶから　4 通り

十の位は，残りの 4 個から選ぶから　4 通り

よって，求める個数は　${}_5P_2+2\times4\times4=5\cdot4+32=52$ (個)

別解　求める個数は，3 桁の数の個数から 3 桁の奇数の個数を引いたものである。

3 桁の数について，百の位は 0 を除いた 5 個から選ぶから　5 通り

十，一の位には，残りの 5 個から 2 個取って並べるから　${}_5P_2$ 通り

よって，3 桁の数は　$5\times{}_5P_2=5\times5\cdot4=100$ (個)

したがって，求める個数は　$100-48=52$ (個)

(3)　340 より大きい数は，34□，35□，4□□，5□□ の形のいずれかである。

[1]　34□ の場合

□ に入る数字は，1，2，5 の 3 個から選ぶから　3 通り

[2]　35□ の場合

□ に入る数字は，0，1，2，4 の 4 個から選ぶから　4 通り

[3]　4□□ または 5□□ の場合

□ に入る数字は，百の位の数字を除いた 5 個から 2 個取って並べるから

$$2\times{}_5P_2 \text{ 通り}$$

[1] ～ [3] から，求める個数は　$3+4+2\times{}_5P_2=47$ (個)

(4)　1□□ の形の数は　${}_5P_2=5\cdot4=20$ (個)

同様に，2□□ の形の数は　20 個

ここまでで　$20+20=40$ (個)

よって，43 番目の数は，3□□ の形の 3 番目の数である。

3□□ の形の数を，小さい順に並べると　301，302，304，……

よって，求める数は　304

8

(解説)

(1)　女子 5 人を 1 組と考え，この 1 組と男子 4 人の並び方は　5! 通り

男　女　女　女　女　女　男　男　男

そのおのおのに対して，女子 5 人の並び方は　5! 通り

よって，求める並び方の総数は

$$5!\times5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\times5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=14400 \text{ (通り)}$$

(2)　男男男男女女女女女 と 女女女女女男男男男 の 2 通りの場合がある。

そのおのおのに対して，男子 4 人の並び方は　4! 通り

女子 5 人の並び方は　5! 通り

よって，求める並び方の総数は

$$2\times4!\times5!=2\times4\cdot3\cdot2\cdot1\times5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5760 \text{ (通り)}$$

(3)　両端の 2 か所に，男子 4 人のうち 2 人が並ぶ方法は　${}_4P_2$ 通り

男 ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ 男

そのおのおのに対して，残りの 7 人の並び方は　7! 通り

よって，求める並び方の総数は

$$_4P_2\times7!=4\cdot3\times7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=60480\ (通り)$$

(4)　男子，女子が交互に並ぶようにするには，まず女子 5 人を 1 列に並べて，その間の 4 か所に男子 4 人を並べればよい。

女 男 女 男 女 男 女 男 女

まず，女子 5 人の並び方は　　$5!$ 通り

そのおのおのに対して，女子と女子の間の 4 か所に男子 4 人を並べる方法は

$4!$ 通り

よって，求める並び方の総数は

$$5!\times4!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\times4\cdot3\cdot2\cdot1=2880\ (通り)$$

(5)　どの男子も隣り合わないようにするには，まず女子 5 人を 1 列に並べて，その間か両端の 6 か所に男子 4 人を並べればよい。

○ 女 ○ 女 ○ 女 ○ 女 ○ 女 ○

(○ の箇所に男子を並べる)

まず，女子 5 人の並び方は　　$5!$ 通り

そのおのおのに対して，女子と女子の間か両端の 6 か所に男子 4 人を並べる方法は

$_6P_4$ 通り

よって，求める並び方の総数は

$$5!\times{}_6P_4=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\times6\cdot5\cdot4\cdot3=43200\ (通り)$$

$\boxed{9}$

(解説)

(1)　両親 2 人，子ども 4 人の計 6 人の円順列であるから，求める並び方の総数は

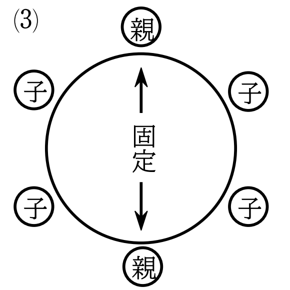
$$(6-1)!=5!=120\ (通り)$$

(2)　両親 2 人を 1 人と考えると，計 5 人の円順列であり，両親 2 人の並び方は 2 通りであるから　　$(5-1)!\times2=4!\times2=24\times2=48$ (通り)

(3)　両親 2 人を固定して考えると，残り 4 つの位置に子ども 4 人が並ぶ順列で

$$4!=24\ (通り)$$

(3)



(4)　まず，男性 3 人が輪を作る方法は

$$(3-1)!=2!=2\ (通り)$$

その間の 3 か所に女性 3 人が並ぶと条件を満たすから，求める並び方は　　$2\times3!=12$ (通り)

$\boxed{10}$

(解説)

(1)　$(与式)=\sin\theta\sin\theta-\cos\theta(-\cos\theta)=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

(2)　$(与式)=\cos^2\theta+\sin^2\theta+(-\sin\theta)^2+(-\cos\theta)^2$

$$=\cos^2\theta+\sin^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta$$

$$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$$

(3)　$\cos124^\circ=\cos(180^\circ-56^\circ)=-\cos56^\circ$

$\cos146^\circ=\cos(90^\circ+56^\circ)=-\sin56^\circ$

よって　　$(与式)=\cos56^\circ(-\cos56^\circ)+\sin56^\circ(-\sin56^\circ)$

$$=-\cos^2 56^\circ-\sin^2 56^\circ$$

$$=-(\sin^2 56^\circ+\cos^2 56^\circ)=-1$$

(4)　$\tan130^\circ=\tan(90^\circ+40^\circ)=-\dfrac{1}{\tan40^\circ}$

よって　　$(与式)=\dfrac{1}{\sin^2 40^\circ}-\left(-\dfrac{1}{\tan40^\circ}\right)^2=\dfrac{1}{\sin^2 40^\circ}-\left(-\dfrac{\cos40^\circ}{\sin40^\circ}\right)^2$

$$=\frac{1}{\sin^2 40^\circ}-\frac{\cos^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ}=\frac{1-\cos^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ}=\frac{\sin^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ}=1$$

$\boxed{11}$

(解説)

(1)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$ のとき，$\cos\theta\geqq0$ であるから

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2}{3} \div \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$90° < \theta \leqq 180°$ のとき，$\cos\theta < 0$ であるから

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2}{3} \div \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

よって　$(\cos\theta,\ \tan\theta) = \left(\frac{\sqrt{5}}{3},\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{5}}{3},\ -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

(2)　$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ から　$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

よって　$\cos^2\theta = \frac{4}{5}$

$\tan\theta = \frac{1}{2} > 0$ より，$0° < \theta < 90°$ であるから　$\cos\theta > 0$

ゆえに　$\cos\theta = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

また　$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\boxed{12}$

解説

(1)　$CD = BD - BC = \sqrt{AD^2 - AB^2} - 1$

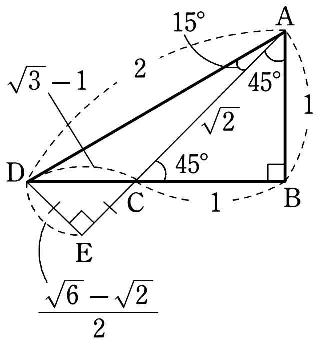
$= \sqrt{2^2 - 1^2} - 1 = \sqrt{3} - 1$

△CDE は ∠E = 90° の直角二等辺三角形であるから

$$DE = CE = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

また，$AC = \sqrt{2}\,BC = \sqrt{2}$ であるから

$$AE = AC + CE = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$



(2)　直角三角形 ADE において

$$\sin 15° = \frac{DE}{AD} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \div 2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15° = \frac{AE}{AD} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \div 2 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15° = \frac{DE}{AE} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \div \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{8-2\sqrt{12}}{6-2} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$$