【定期試験対策講習】

１学期
中間考査
対策教材②

高１甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｙ「微分法」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

次の関数を導関数の定義に従って微分せよ。

(1)　$y=x^2+4x$　　(2)　$y=\dfrac{1}{x}$

$\boxed{2}$

(1)　等式 $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{ax^2+bx+3}{x^2-2x-3}=\frac{5}{4}$ を満たす定数 a，b の値を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$ を $f'(a)$ を用いて表せ。

$\boxed{3}$

曲線 $y=-x^3+5x$ について，次の接線の方程式を求めよ。

(1)　曲線上の点 $(1,\ 4)$ における接線　　(2)　傾き -4 の接線

$\boxed{4}$

点 $(2,\ -2)$ から，曲線 $y=\dfrac{1}{3}x^3-x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

$\boxed{5}$

2 つの放物線 $y=-x^2$，$y=x^2-2x+5$ の共通接線の方程式を求めよ。

$\boxed{6}$

2 曲線 $y=x^3-2x+1$ と $y=x^2+2ax+1$ が接するとき，定数 a の値を求めよ。また，その接点における共通の接線の方程式を求めよ。

$\boxed{7}$

関数 $f(x)=x^3+ax^2+2x+3$ が次の条件を満たすように，定数 a の値の範囲をそれぞれ定めよ。

(1)　極値をもつ。　　(2)　常に単調に増加する。

$\boxed{8}$

次の関数の極値を求め，そのグラフの概形をかけ。

(1)　$y=3x^4-16x^3+18x^2+5$　　(2)　$y=x^4-8x^3+18x^2-11$

$\boxed{9}$

$x=1$ で極小値 4 をとり，$x=2$ で極大値 5 をとる 3 次関数 $f(x)$ を求めよ。

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答　(1)　$y'=2x+4$　　(2)　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$a=2$，$b=-7$　　(2)　$3f'(a)$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$y=2x+2$　　(2)　$y=-4x+6\sqrt{3}$，$y=-4x-6\sqrt{3}$

$\boxed{4}$

解答　$y=-x$，$y=8x-18$

$\boxed{5}$

解答　$y=2x+1$，$y=-4x+4$

$\boxed{6}$

解答　$a=-1$ のとき　$y=-2x+1$，$a=-\dfrac{9}{8}$ のとき　$y=-\dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{4}$

$\boxed{7}$

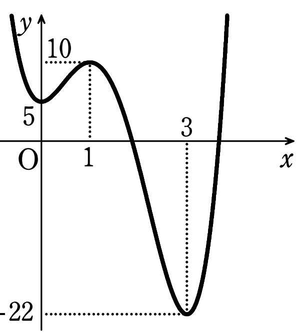
解答　(1)　$a<-\sqrt{6}$，$\sqrt{6}<a$　　(2)　$-\sqrt{6}\leqq a\leqq\sqrt{6}$

$\boxed{8}$

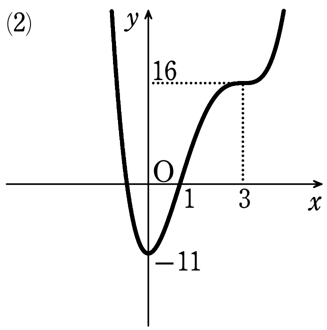
解答　(1)　$x=0$ で極小値 5，$x=1$ で極大値 10，$x=3$ で極小値 -22；[図]

(2)　$x=0$ で極小値 -11；[図]

(1)



(2)



$\boxed{9}$

解答　$f(x)=-2x^3+9x^2-12x+9$

$\boxed{1}$

解説

(1)　$y'=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\{(x+h)^2+4(x+h)\}-(x^2+4x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2+4(x+h)-4x}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2hx+h^2+4h}{h}=\lim\limits_{h\to0}(2x+h+4)$

$=2x+4$

(2)　$\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-(x+h)}{(x+h)x}=\dfrac{-h}{(x+h)x}$ であるから

$y'=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{-h}{(x+h)x}\cdot\dfrac{1}{h}\right\}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-1}{(x+h)x}=-\dfrac{1}{x^2}$

$\boxed{2}$

解説

(1)　$\lim\limits_{x\to3}(x^2-2x-3)=0$ であるから　　$\lim\limits_{x\to3}(ax^2+bx+3)=0$

ゆえに　$3a+b+1=0$　　よって　$b=-3a-1$　……①

ゆえに　$ax^2+bx+3=ax^2-(3a+1)x+3$

$=(x-3)(ax-1)$

このとき　$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{ax^2+bx+3}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(ax-1)}{(x-3)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{ax-1}{x+1}=\dfrac{3a-1}{4}$

$\dfrac{3a-1}{4}=\dfrac{5}{4}$ から　　$a=2$　　① から　　$b=-7$

(2)　$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\left\{2\cdot\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right\}$

$$=2\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$
$$=2f'(a)+f'(a)$$
$$=3f'(a)$$

$\boxed{3}$

(解説)

$f(x)=-x^3+5x$ とすると　$f'(x)=-3x^2+5$

(1)　$f'(1)=-3\cdot1^2+5=2$ であるから，求める接線の方程式は

$y-4=2(x-1)$　すなわち　$y=2x+2$

(2)　接点の座標を $(a,\ -a^3+5a)$ とすると，傾きが -4 であるから

$f'(a)=-4$　すなわち　$-3a^2+5=-4$　　これを解くと　$a=\pm\sqrt{3}$

よって，接点の座標は　$(\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$，$(-\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$

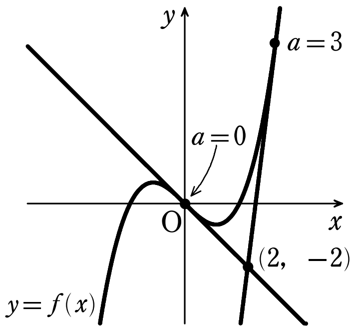
したがって，求める接線の方程式は

$y-2\sqrt{3}=-4(x-\sqrt{3})$，$y+2\sqrt{3}=-4(x+\sqrt{3})$

すなわち　$y=-4x+6\sqrt{3}$，$y=-4x-6\sqrt{3}$

$\boxed{4}$

(解説)



$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x$ とすると

$f'(x)=x^2-1$

曲線 $y=f(x)$ 上の点$(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y-\left(\frac{1}{3}a^3-a\right)=(a^2-1)(x-a)$$

すなわち　$y=(a^2-1)x-\dfrac{2}{3}a^3$　……①

この直線が点 $(2,\ -2)$ を通るから

$$-2=(a^2-1)\cdot2-\frac{2}{3}a^3$$

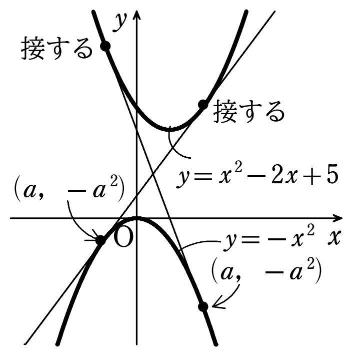
整理すると　$a^2(a-3)=0$　　ゆえに　$a=0,\ 3$

求める接線の方程式は，この a の値を ① に代入して

$a=0$ のとき　$y=-x$，　$a=3$ のとき　$y=8x-18$

$\boxed{5}$

(解説)



$y=-x^2$ に対して　$y'=-2x$

よって，放物線 $y=-x^2$ 上の点 $(a,\ -a^2)$ における接線の方程式は

$$y-(-a^2)=-2a(x-a)$$

すなわち　$y=-2ax+a^2$　……①

この直線が放物線 $y=x^2-2x+5$ にも接するための条件は，2 次方程式

$x^2-2x+5=-2ax+a^2$　すなわち

$x^2+2(a-1)x-a^2+5=0$　……② が重解をもつことである。

ゆえに，② の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a-1)^2-1\cdot(-a^2+5)=2a^2-2a-4=2(a+1)(a-2)$$

$D=0$ から　$(a+1)(a-2)=0$　よって　$a=-1,\ 2$

この値を ① に代入して，求める共通接線の方程式は　$y=2x+1$，$y=-4x+4$

$\boxed{6}$

(解説)

$f(x)=x^3-2x+1$，$g(x)=x^2+2ax+1$ とすると

$f'(x)=3x^2-2$，　$g'(x)=2x+2a$

2 曲線が $x=p$ の点で接するための条件は

$f(p)=g(p)$，　$f'(p)=g'(p)$

よって　$p^3-2p+1=p^2+2ap+1$　……①

$3p^2-2=2p+2a$　……②

② から　$2a=3p^2-2p-2$　……③

これを ① に代入して　$p^3-2p+1=p^2+(3p^2-2p-2)p+1$

ゆえに　$p^2(2p-1)=0$　　よって　$p=0,\ \dfrac{1}{2}$

③ から　$p=0$ のとき　$a=-1$，　$p=\dfrac{1}{2}$ のとき　$a=-\dfrac{9}{8}$

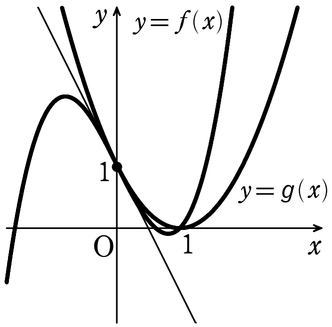
曲線 $y=f(x)$ 上の点 $x=p$ における接線の方程式は

$$y-(p^3-2p+1)=(3p^2-2)(x-p)\quad \text{すなわち}\quad y=(3p^2-2)x-2p^3+1$$

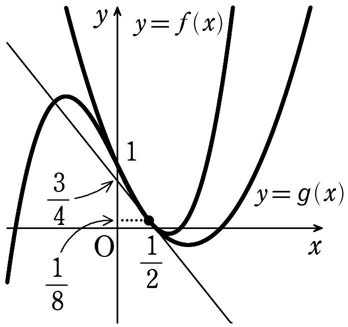
ゆえに，求める接線の方程式は

$a=-1\ (p=0)$ のとき　$y=-2x+1$，　$a=-\dfrac{9}{8}\left(p=\dfrac{1}{2}\right)$ のとき　$y=-\dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{4}$

$a=-1$ のとき



$a=-\dfrac{9}{8}$ のとき



7

(解説)

(1)　$f'(x)=3x^2+2ax+2$

$f(x)$ が極値をもつための必要十分条件は，2 次方程式

$$f'(x)=0\quad \text{すなわち}\quad 3x^2+2ax+2=0\quad \cdots\cdots ①$$

が異なる 2 つの実数解をもつことである。

すなわち，① の判別式 D について　$\dfrac{D}{4}=a^2-3\cdot 2>0$

これを解いて　$a<-\sqrt{6}$，$\sqrt{6}<a$

(2)　$f(x)$ が常に単調に増加するための必要十分条件は，$f'(x)\geqq 0$ が常に成り立つことである。

$f'(x)$ の x^2 の係数は正であるから，$f'(x)\geqq 0$ が常に成り立つのは，① の判別式 D について　$\dfrac{D}{4}=a^2-6\leqq 0$　が成り立つときである。

これを解いて　$-\sqrt{6}\leqq a\leqq \sqrt{6}$

参考　$f(x)$ が極値をもたないような定数 a の値の範囲は，(2) と同じで $-\sqrt{6}\leqq a\leqq \sqrt{6}$ となる。

8

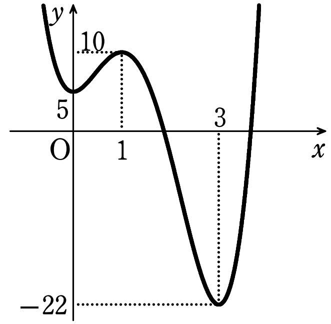
(解説)

(1)　$y'=12x^3-48x^2+36x=12x(x^2-4x+3)=12x(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 1,\ 3$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	極小 5	↗	極大 10	↘	極小 -22	↗



よって　$x=0$ で極小値 5，$x=1$ で極大値 10，
$x=3$ で極小値 -22 をとる。

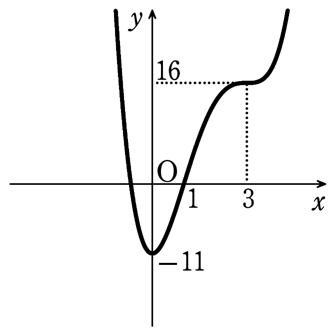
また，グラフは右の図のようになる。

(2)　$y'=4x^3-24x^2+36x=4x(x^2-6x+9)=4x(x-3)^2$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 3$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	↘	極小 -11	↗	16	↗



よって　$x=0$ で極小値 -11　をとる。

また，グラフは右の図のようになる。

$\boxed{9}$

(解説)

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とすると　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$x=1$ で極小値 4 をとるから　$f'(1)=0$，$f(1)=4$

よって　$3a+2b+c=0$ …… ①，　$a+b+c+d=4$ …… ②

$x=2$ で極大値 5 をとるから　$f'(2)=0$，$f(2)=5$

よって　$12a+4b+c=0$ …… ③，　$8a+4b+2c+d=5$ …… ④

④−② から　$7a+3b+c=1$ …… ⑤

③−① から　$9a+2b=0$ …… ⑥

③−⑤ から　$5a+b=-1$ …… ⑦

⑥，⑦ を連立して解くと　$a=-2$，$b=9$

$a=-2$，$b=9$ を ① に代入して

$-6+18+c=0$　　よって　$c=-12$

$a=-2$，$b=9$，$c=-12$ を ② に代入して

$-2+9-12+d=4$　　よって　$d=9$

ゆえに　$f(x)=-2x^3+9x^2-12x+9$

このとき　$f'(x)=-6x^2+18x-12$

$=-6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1$，2

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 4	↗	極大 5	↘

よって，$f(x)$ は $x=1$ で極小値 4，$x=2$ で極大値 5 をとり，条件を満たす。

したがって　$f(x)=-2x^3+9x^2-12x+9$