

【定期試験対策講習】

# 1 学期 中間**間** 考查 対策教材①

## 高 1 甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学 K「平面ベクトル」

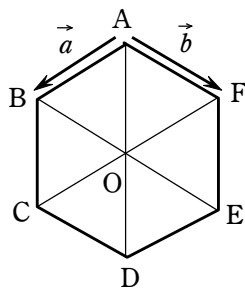
の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しを  
してください。

【問題】

1

正六角形 ABCDEF において、 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AD}=\vec{u}$ ,  $\overrightarrow{BD}=\vec{v}$  とするとき、 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  で表せ。



2

$\vec{p}=(5, 1)$ ,  $\vec{q}=(-3, 2)$ ,  $\vec{r}=(1, -1)$  とする。

- (1)  $\vec{p}+t\vec{q}$  と  $\vec{r}$  が平行になるように、実数  $t$  の値を定めよ。
- (2)  $|\vec{p}+t\vec{q}|$  の最小値と、そのときの  $t$  の値を求めよ。

3

$\triangle ABC$  において、 $AB=\sqrt{2}$ ,  $CA=2$ ,  $\angle B=45^\circ$ ,  $\angle C=30^\circ$  であるとき、次の内積を求めよ。

- (1)  $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$
- (2)  $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$
- (3)  $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$
- (4)  $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$

4

$\vec{a}=(1, -\sqrt{3})$  とのなす角が  $120^\circ$ 、大きさが  $2\sqrt{10}$  であるベクトル  $\vec{b}$  を求めよ。

5

$\triangle ABC$  において、辺 BC を 2:1 に外分する点を P、辺 CA の中点を Q、辺 AB を 1:2 に内分する点を R とする。

- (1) 3点 P, Q, R は一直線上にあることを証明せよ。
- (2)  $PQ:QR$  を求めよ。

6

$\triangle OAB$  において、 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$  とする。辺 OA を 3:2 に内分する点を C、辺 OB を 3:4 に内分する点を D、線分 AD と BC との交点を P とし、直線 OP と辺 AB との交点を Q とする。次のベクトルを  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ。

- (1)  $\overrightarrow{OP}$
- (2)  $\overrightarrow{OQ}$

7

ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  について  $|\vec{a}|=\sqrt{3}$ ,  $|\vec{b}|=2$ ,  $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$  であるとき

- (1) 内積  $\vec{a}\cdot\vec{b}$  の値を求めよ。
- (2) ベクトル  $2\vec{a}-3\vec{b}$  の大きさを求めよ。
- (3) ベクトル  $\vec{a}+t\vec{b}$  の大きさが最小となるように実数  $t$  の値を定め、そのときの最小値を求めよ。

8

(1)  $\triangle ABC$  と点 P が  $6\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$  を満たすとき、点 P はどのような位置にあるか。

(2)  $\triangle PAB$ ,  $\triangle PBC$ ,  $\triangle PCA$  の面積の比を求めよ。

9

$AB=3$ ,  $AD=4$  の長方形 ABCD がある。 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$  とするとき、ベクトル  $\overrightarrow{BD}$  と平行な単位ベクトルを  $\vec{b}$ ,  $\vec{d}$  で表せ。

10

$\vec{a}=(2, -1)$ ,  $\vec{b}=(3, -2)$  のとき、 $\vec{c}=(-6, 5)$  を  $s\vec{a}+t\vec{b}$  の形に表せ。

【解答&解説】

1

解答  $\vec{a} = \vec{u} - \vec{v}, \vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$

2

解答 (1)  $t=6$  (2)  $t=1$  で最小値  $\sqrt{13}$

3

解答 (1)  $1 + \sqrt{3}$  (2)  $3 + \sqrt{3}$  (3)  $-1 - \sqrt{3}$  (4)  $-3 - \sqrt{3}$

4

解答  $(-2\sqrt{10}, 0), (\sqrt{10}, \sqrt{30})$

5

解答 (1) 略 (2) 3:1

6

解答 (1)  $\vec{OP} = \frac{6}{13}\vec{a} + \frac{3}{13}\vec{b}$  (2)  $\vec{OQ} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

7

解答 (1) 1 (2) 6 (3)  $t = -\frac{1}{4}$  のとき最小値  $\frac{\sqrt{11}}{2}$

8

解答 (1) 辺 BC を 2:3 に内分する点を D とすると、点 P は線分 AD を 5:6 に内分する位置  
(2) 2:6:3

9

解答 同じ向き  $-\frac{\vec{b}}{5} + \frac{\vec{d}}{5}$ , 反対の向き  $\frac{\vec{b}}{5} - \frac{\vec{d}}{5}$

10

解答  $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$

1

解説

対角線 AD, BE, CF の交点を O とすると  $\vec{u} = \vec{AD} = 2\vec{AO}$

$\vec{AO} = \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{a} + \vec{b}$  であるから  $\vec{u} = 2(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$

また  $\vec{v} = \vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a} + 2\vec{b}$

よって  $2\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{u}$  …… ①,  $\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{v}$  …… ②

①-② から  $\vec{a} = \vec{u} - \vec{v}$

①-②×2 から  $-2\vec{b} = \vec{u} - 2\vec{v}$  よって  $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$

2

解説

$$\vec{p} + t\vec{q} = (5, 1) + t(-3, 2) = (5-3t, 1+2t)$$

(1)  $\vec{p} + t\vec{q} \neq \vec{0}, \vec{r} \neq \vec{0}$  であるから、 $\vec{p} + t\vec{q}$  と  $\vec{r}$  が平行になるための必要十分条件は、 $\vec{p} + t\vec{q} = k\vec{r}$  となる実数  $k$  が存在することである。

よって  $(5-3t, 1+2t) = k(1, -1)$

ゆえに  $5-3t = k$  …… ①,  $1+2t = -k$  …… ②

①, ② から  $k$  を消去して  $1+2t = -(5-3t)$  これを解いて  $t=6$

このとき、① から  $k = -13$  (実数) となり、適する。

したがって、求める  $t$  の値は  $t=6$

(2)  $|\vec{p} + t\vec{q}|^2 = (5-3t)^2 + (1+2t)^2 = 13t^2 - 26t + 26$   
 $= 13(t^2 - 2t) + 26 = 13(t-1)^2 + 13$

よって、 $|\vec{p} + t\vec{q}|^2$  は  $t=1$  で最小値 13 をとる。

$|\vec{p} + t\vec{q}| \geq 0$  であるから、このとき  $|\vec{p} + t\vec{q}|$  も最小となる。

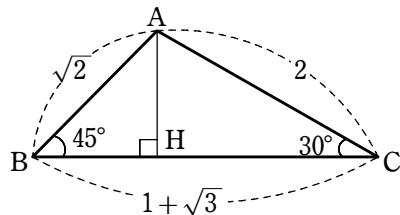
したがって、 $|\vec{p} + t\vec{q}|$  は  $t=1$  で最小値  $\sqrt{13}$  をとる。

3

解説

頂点 A から辺 BC に下ろした垂線を AH とすると

$$\begin{aligned} BC &= BH + HC \\ &= AB \cos B + AC \cos C \\ &= \sqrt{2} \cos 45^\circ + 2 \cos 30^\circ \\ &= 1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$



(1)  $\vec{BA}$  と  $\vec{BC}$  のなす角は  $45^\circ$  であるから

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| |\vec{BC}| \cos 45^\circ = \sqrt{2} \times (1 + \sqrt{3}) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{3}$$

(2)  $\vec{CA}$  と  $\vec{CB}$  のなす角は  $30^\circ$  であるから

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = |\vec{CA}| |\vec{CB}| \cos 30^\circ = 2 \times (1 + \sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 + \sqrt{3}$$

(3)  $\vec{AB}$  と  $\vec{BC}$  のなす角は、 $180^\circ - 45^\circ$  すなわち  $135^\circ$  である。

したがって

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = |\vec{AB}| |\vec{BC}| \cos 135^\circ = \sqrt{2} \times (1 + \sqrt{3}) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 - \sqrt{3}$$

(4)  $\vec{BC}$  と  $\vec{CA}$  のなす角は、 $180^\circ - 30^\circ$  すなわち  $150^\circ$  である。

したがって

$$\vec{BC} \cdot \vec{CA} = |\vec{BC}| |\vec{CA}| \cos 150^\circ = (1 + \sqrt{3}) \times 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 - \sqrt{3}$$

4

解説

$\vec{b} = (x, y)$  とする。

$$|\vec{b}| = 2\sqrt{10} \text{ から } |\vec{b}|^2 = 40 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + y^2 = 40 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$  であるから

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 120^\circ = 2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{10}$$

また、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot x + (-\sqrt{3}) \cdot y = x - \sqrt{3}y$  であるから

$$x - \sqrt{3}y = -2\sqrt{10}$$

よって  $x = \sqrt{3}y - 2\sqrt{10} \quad \dots\dots \textcircled{2}$

② を ① に代入して  $(\sqrt{3}y - 2\sqrt{10})^2 + y^2 = 40$

ゆえに  $y^2 - \sqrt{30}y = 0$

よって  $y(y - \sqrt{30}) = 0$  ゆえに  $y = 0, \sqrt{30}$

$y = 0$  のとき、② から  $x = -2\sqrt{10}$   $y = \sqrt{30}$  のとき、② から  $x = \sqrt{10}$

したがって  $\vec{b} = (-2\sqrt{10}, 0), (\sqrt{10}, \sqrt{30})$

5

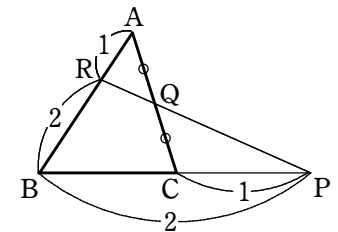
解説

(1)  $\vec{AB} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c}$  とすると

$$\vec{AP} = \frac{-\vec{AB} + 2\vec{AC}}{2-1} = -\vec{b} + 2\vec{c}$$

$$\vec{AQ} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{AR} = \frac{1}{3}\vec{AB} = \frac{1}{3}\vec{b}$$



よって  $\vec{PQ} = \vec{AQ} - \vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{c} - (-\vec{b} + 2\vec{c}) = \frac{2\vec{b} - 3\vec{c}}{2}$

$$\vec{PR} = \vec{AR} - \vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{b} - (-\vec{b} + 2\vec{c}) = \frac{2(2\vec{b} - 3\vec{c})}{3}$$

ゆえに  $\vec{PR} = \frac{4}{3}\vec{PQ} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

したがって、3点 P, Q, R は一直線上にある。

(2) ① から  $PQ : QR = 3 : 1$

別解 (1), (2)  $\vec{BP} = \vec{p}, \vec{BR} = \vec{r}$  とすると

$$\vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{BP} = \frac{1}{2}\vec{p}, \quad \vec{BA} = \frac{3}{2}\vec{BR} = \frac{3}{2}\vec{r}$$

よって  $\vec{BQ} = \frac{\vec{BC} + \vec{BA}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{p} + \frac{3}{2}\vec{r}\right) = \frac{\vec{p} + 3\vec{r}}{4} = \frac{\vec{p} + 3\vec{r}}{3+1}$

ゆえに、点 Q は線分 PR を 3 : 1 に内分する。

したがって、3点 P, Q, R は一直線上にあり PQ : QR = 3 : 1

6

解説

(1) AP : PD = s : (1-s), BP : PC = t : (1-t) とすると

$$\vec{OP} = (1-s)\vec{OA} + s\vec{OD} = (1-s)\vec{a} + \frac{3}{7}s\vec{b},$$

$$\vec{OP} = t\vec{OC} + (1-t)\vec{OB} = \frac{3}{5}t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$$

$$\text{よって } (1-s)\vec{a} + \frac{3}{7}s\vec{b} = \frac{3}{5}t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$$

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \not\parallel \vec{b} \text{ であるから } 1-s = \frac{3}{5}t, \frac{3}{7}s = 1-t$$

$$\text{これを解いて } s = \frac{7}{13}, t = \frac{10}{13} \text{ したがって } \vec{OP} = \frac{6}{13}\vec{a} + \frac{3}{13}\vec{b}$$

(2) AQ : QB = u : (1-u) とすると  $\vec{OQ} = (1-u)\vec{a} + u\vec{b}$

また、点 Q は直線 OP 上にあるから、 $\vec{OQ} = k\vec{OP}$

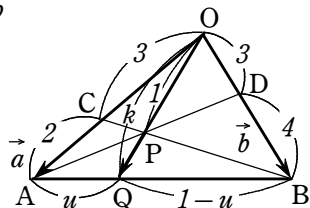
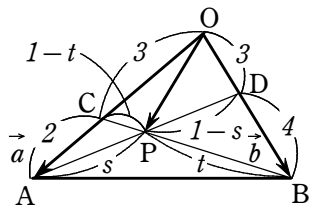
(k は実数) とすると、(1)の結果から

$$\vec{OQ} = k\left(\frac{6}{13}\vec{a} + \frac{3}{13}\vec{b}\right) = \frac{6}{13}k\vec{a} + \frac{3}{13}k\vec{b}$$

$$\text{よって } (1-u)\vec{a} + u\vec{b} = \frac{6}{13}k\vec{a} + \frac{3}{13}k\vec{b}$$

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \not\parallel \vec{b} \text{ であるから } 1-u = \frac{6}{13}k, u = \frac{3}{13}k$$

$$\text{これを解いて } k = \frac{13}{9}, u = \frac{1}{3} \text{ したがって } \vec{OQ} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$



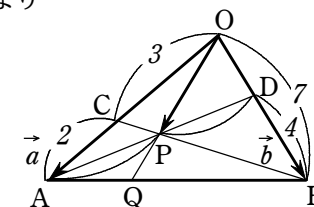
別解 チェバ・メネラウスの定理の利用

(1)  $\triangle OAD$  と直線 BC について、メネラウスの定理により

$$\frac{OC}{CA} \cdot \frac{AP}{PD} \cdot \frac{DB}{BO} = 1 \quad \text{よって } \frac{3}{2} \cdot \frac{AP}{PD} \cdot \frac{4}{7} = 1$$

$$\text{ゆえに } \frac{AP}{PD} = \frac{7}{6} \quad \text{すなわち } AP : PD = 7 : 6$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \vec{OP} &= \frac{6\vec{OA} + 7\vec{OD}}{7+6} = \frac{1}{13}(6\vec{a} + 7 \cdot \frac{3}{7}\vec{b}) \\ &= \frac{6}{13}\vec{a} + \frac{3}{13}\vec{b} \end{aligned}$$

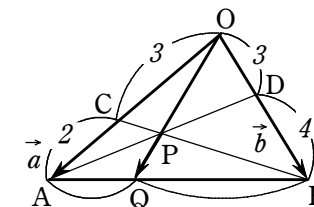


(2)  $\triangle OAB$  において、チェバの定理により

$$\frac{OC}{CA} \cdot \frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BD}{DO} = 1 \quad \text{よって } \frac{3}{2} \cdot \frac{AQ}{QB} \cdot \frac{4}{3} = 1$$

$$\text{ゆえに } \frac{AQ}{QB} = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち } AQ : QB = 1 : 2$$

$$\text{よって } \vec{OQ} = \frac{2\vec{OA} + \vec{OB}}{1+2} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$



別解 直線のベクトル方程式の利用

(1)  $\vec{OP} = x\vec{a} + y\vec{b}$  ( $x, y$  は実数) とする。

$$\vec{b} = \frac{7}{3}\vec{OD} \text{ より } \vec{OP} = x\vec{a} + y \cdot \frac{7}{3}\vec{OD} = x\vec{OA} + \frac{7}{3}y\vec{OD}$$

$$\text{点 P は直線 AD 上にあるから } x + \frac{7}{3}y = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\vec{a} = \frac{5}{3}\vec{OC} \text{ より } \vec{OP} = x \cdot \frac{5}{3}\vec{OC} + y\vec{b} = \frac{5}{3}x\vec{OC} + y\vec{OB}$$

$$\text{点 P は直線 BC 上にあるから } \frac{5}{3}x + y = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解いて } x = \frac{6}{13}, y = \frac{3}{13} \quad \text{よって } \vec{OP} = \frac{6}{13}\vec{a} + \frac{3}{13}\vec{b}$$

(2)  $\vec{OQ} = k\vec{OP} = \frac{6}{13}k\vec{a} + \frac{3}{13}k\vec{b}$  ( $k$  は実数) とおくと、点 Q は直線 AB 上にあるから

$$\frac{6}{13}k + \frac{3}{13}k = 1 \quad \text{よって } k = \frac{13}{9}$$

ゆえに  $\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

7

解説

(1)  $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{5}$  から  $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = 5$

よって  $(\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = 5$  ゆえに  $|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 5$

$|\vec{a}| = \sqrt{3}$ ,  $|\vec{b}| = 2$  であるから  $3 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 = 5$

したがって  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$

(2)  $|2\vec{a}-3\vec{b}|^2 = (2\vec{a}-3\vec{b}) \cdot (2\vec{a}-3\vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2$   
 $= 4 \times (\sqrt{3})^2 - 12 \times 1 + 9 \times 2^2 = 36$

$|2\vec{a}-3\vec{b}| \geq 0$  であるから  $|2\vec{a}-3\vec{b}| = 6$

(3)  $|\vec{a}+t\vec{b}|^2 = (\vec{a}+t\vec{b}) \cdot (\vec{a}+t\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2$   
 $= 4t^2 + 2t + 3 = 4\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{11}{4}$

よって、 $|\vec{a}+t\vec{b}|^2$  は  $t = -\frac{1}{4}$  のとき最小値  $\frac{11}{4}$  をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}| \geq 0$  であるから、このとき  $|\vec{a}+t\vec{b}|$  も最小となる。

したがって、 $|\vec{a}+t\vec{b}|$  は  $t = -\frac{1}{4}$  のとき最小値  $\frac{\sqrt{11}}{2}$  をとる。

8

解説

(1) 等式を変形すると

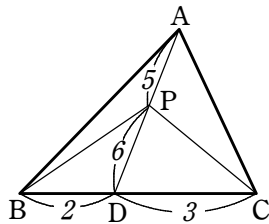
$$-6\overrightarrow{AP} + 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) = \vec{0}$$

よって  $11\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

ゆえに  $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{11} \cdot \frac{3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{5}$

辺 BC を 2:3 に内分する点を D とすると

$$\overrightarrow{AP} = \frac{5}{11} \overrightarrow{AD}$$



したがって、辺 BC を 2:3 に内分する点を D とすると、点 P は線分 AD を 5:6 に内分する位置にある。

(2)  $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とすると

$$\triangle PAB = \frac{5}{11} \cdot \triangle ABD = \frac{5}{11} \cdot \frac{2}{5} \cdot \triangle ABC = \frac{2}{11} S$$

$$\triangle PBC = \frac{6}{11} \cdot \triangle ABC = \frac{6}{11} S$$

$$\triangle PCA = \frac{5}{11} \cdot \triangle ACD = \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{5} \cdot \triangle ABC = \frac{3}{11} S$$

ゆえに  $\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA = \frac{2}{11} S : \frac{6}{11} S : \frac{3}{11} S = 2 : 6 : 3$

9

解説

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{d} - \vec{b}$$

$$|\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

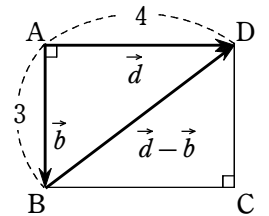
$\overrightarrow{BD}$  と平行な単位ベクトルのうち

$\overrightarrow{BD}$  と同じ向きのもは

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BD}|} = \frac{\vec{d} - \vec{b}}{5} = -\frac{\vec{b}}{5} + \frac{\vec{d}}{5}$$

$\overrightarrow{BD}$  と反対の向きのもは

$$-\frac{\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BD}|} = -\frac{\vec{d} - \vec{b}}{5} = \frac{\vec{b}}{5} - \frac{\vec{d}}{5}$$



10

解説

$$\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b} \text{ とおくと } (-6, 5) = s(2, -1) + t(3, -2)$$

$$= (2s + 3t, -s - 2t)$$

よって  $2s + 3t = -6, -s - 2t = 5$

これを解いて  $s = 3, t = -4$  したがって  $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$