【定期試験対策講習】

１学期
中間考査
対策教材①

中３女学院数学

【注意事項】

本教材は

数学Ⅰ「２次関数」の２次不等式
数学Ⅰ「三角比」の前半

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

次の不等式を解け。

(1) $\begin{cases} x^2 > 1+x \\ x \leqq 15-6x^2 \end{cases}$　(2) $2 \leqq x^2 - x \leqq 4x-4$　(3) $\begin{cases} x^2+3x+2 \leqq 0 \\ x^2-x-2<0 \end{cases}$

$\boxed{2}$

2 次不等式 $x^2-(a+2)x+2a>0$ を解け。ただし，a は定数とする。

$\boxed{3}$

(1) 2 次不等式 $ax^2+bx+3>0$ の解が $-1<x<3$ であるように定数 a，b の値を定めよ。

(2) 任意の実数 x に対して，不等式 $ax^2-2\sqrt{3}x+a+2 \leqq 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$

2 つの 2 次方程式

$$ax^2-4x+a=0, \qquad x^2-ax+a^2-3a=0$$

について，次の条件を満たす定数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ。

(1) 2 つの方程式がともに実数解をもつ。

(2) 少なくとも一方の方程式が実数解をもつ。

$\boxed{5}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(1) $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{6}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の不等式を満たす θ の範囲を求めよ。

(1) $\sqrt{2}\sin\theta - 1 \leqq 0$　(2) $2\cos\theta + 1 > 0$　(3) $\tan\theta > -1$

$\boxed{7}$

次の方程式を解け。

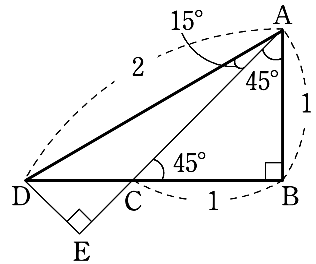
(1) $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$　(2) $\sin\theta\tan\theta = -\dfrac{3}{2}$ $(90° < \theta \leqq 180°)$

$\boxed{8}$

(1) 右の図で，線分 DE，AE の長さを求めよ。

(2) 右の図を利用して，次の値を求めよ。

$\sin 15°$，　$\cos 15°$，　$\tan 15°$



【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答 (1) $-\dfrac{5}{3} \leqq x < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$　(2) $2 \leqq x \leqq 4$　(3) 解はない

$\boxed{2}$

解答 $a<2$ のとき　$x<a$，$2<x$

$a=2$ のとき　2 以外のすべての実数

$a>2$ のとき　$x<2$，$a<x$

$\boxed{3}$

解答 (1) $a=-1$，$b=2$　(2) $a \leqq -3$

$\boxed{4}$

解答 (1) $0<a \leqq 2$　(2) $-2 \leqq a < 0$，$0<a \leqq 4$

$\boxed{5}$

解答 (1) $(\cos\theta,\ \tan\theta)=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

(2) $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\boxed{6}$

解答 (1) $0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$，$135^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$　(2) $0^\circ \leqq \theta < 120^\circ$

(3) $0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$，$135^\circ < \theta \leqq 180^\circ$

$\boxed{7}$

解答 (1) $\theta=30^\circ,\ 90^\circ,\ 150^\circ$　(2) $\theta=120^\circ$

$\boxed{8}$

解答 (1) $\mathrm{DE}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，$\mathrm{AE}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

(2) $\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$

$\boxed{1}$

解説

(1) $\begin{cases} x^2>1+x & \cdots\cdots ① \\ x \leqq 15-6x^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① を変形すると　$x^2-x-1>0$

$x^2-x-1=0$ を解くと　$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

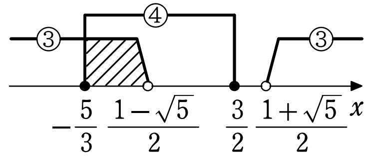
よって，① の解は　$x<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<x$　……③

② を変形すると　$6x^2+x-15 \leqq 0$　ゆえに　$(3x+5)(2x-3) \leqq 0$

よって　$-\dfrac{5}{3} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$-\dfrac{5}{3} \leqq x < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$



(2) $2 \leqq x^2-x \leqq 4x-4$ から　$\begin{cases} 2 \leqq x^2-x & \cdots\cdots ① \\ x^2-x \leqq 4x-4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① を変形すると　$x^2-x-2 \geqq 0$　ゆえに　$(x+1)(x-2) \geqq 0$

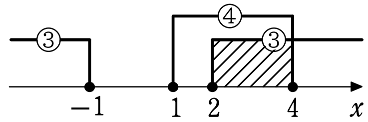
よって　$x \leqq -1$，$2 \leqq x$　……③

② を変形すると　$x^2-5x+4 \leqq 0$

ゆえに　$(x-1)(x-4) \leqq 0$

よって　$1 \leqq x \leqq 4$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて　$2 \leqq x \leqq 4$



(3) $\begin{cases} x^2+3x+2 \leqq 0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-x-2<0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

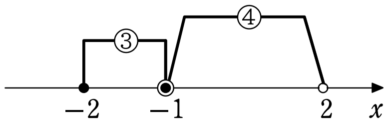
① から　$(x+1)(x+2) \leqq 0$

よって　$-2 \leqq x \leqq -1$　……③

② から　$(x+1)(x-2)<0$

よって　$-1<x<2$　…… ④

③ と ④ の共通範囲はないから，この連立不等式の解はない。



$\boxed{2}$

(解説)

左辺を因数分解すると　$(x-a)(x-2)>0$　…… ①

[1]　$a<2$ のとき　① の解は　$x<a,\ 2<x$

[2]　$a=2$ のとき　① は $(x-2)^2>0$ となり，解は 2 以外のすべての実数。

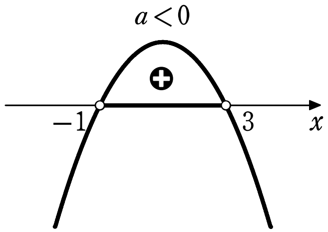
[3]　$a>2$ のとき　① の解は　$x<2,\ a<x$

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　条件から，2 次関数 $y=ax^2+bx+3$ のグラフは，$-1<x<3$ のときだけ x 軸より上側にある。

すなわち，グラフは上に凸の放物線で 2 点 $(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ を通るから



$a<0$,

$a-b+3=0$　…… ①,

$9a+3b+3=0$　…… ②

①，② を解いて　$a=-1,\ b=2$

これは $a<0$ を満たす。

別解　$-1<x<3$ を解とする 2 次不等式の 1 つは　$(x+1)(x-3)<0$

左辺を展開して　$x^2-2x-3<0$

両辺に -1 を掛けて　$-x^2+2x+3>0$

$ax^2+bx+3>0$ と係数を比較して　$a=-1,\ b=2$

(2)　$a=0$ のとき，不等式は $-2\sqrt{3}\,x+2\leqq 0$ となり，例えば $x=0$ のとき成り立たない。

$a\fallingdotseq 0$ のとき，$ax^2-2\sqrt{3}\,x+a+2=0$ の判別式を D とすると，常に不等式が成り立つための必要十分条件は

$a<0$　かつ　$\dfrac{D}{4}=(-\sqrt{3})^2-a(a+2)\leqq 0$

すなわち　$a<0$　かつ　$a^2+2a-3\geqq 0$

$a^2+2a-3\geqq 0$ から　$(a+3)(a-1)\geqq 0$　よって　$a\leqq -3,\ 1\leqq a$

$a<0$ との共通範囲を求めて　$a\leqq -3$

$\boxed{4}$

(解説)

2 次方程式 $ax^2-4x+a=0$，$x^2-ax+a^2-3a=0$ の判別式を，それぞれ D_1，D_2 とすると　$\dfrac{D_1}{4}=(-2)^2-a\cdot a=-(a^2-4)=-(a+2)(a-2)$

$D_2=(-a)^2-4\cdot 1\cdot(a^2-3a)=-3a^2+12a=-3a(a-4)$

(1)　問題の条件は，$a\fallingdotseq 0$ のもとで　$D_1\geqq 0$　かつ　$D_2\geqq 0$

$D_1\geqq 0$ から　$(a+2)(a-2)\leqq 0$

よって　$-2\leqq a\leqq 2$

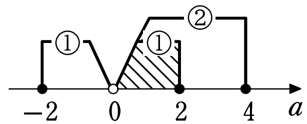
$a\fallingdotseq 0$ であるから　$-2\leqq a<0,\ 0<a\leqq 2$　…… ①

$D_2\geqq 0$ から　$3a(a-4)\leqq 0$

よって　$0\leqq a\leqq 4$

$a\fallingdotseq 0$ であるから　$0<a\leqq 4$　…… ②

①，② の共通範囲を求めて　$0<a\leqq 2$

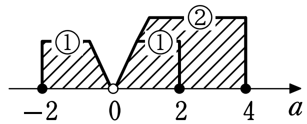


(2)　問題の条件は，$a\fallingdotseq 0$ のもとで

$D_1\geqq 0$　または　$D_2\geqq 0$

① と ② の範囲を合わせて

$-2\leqq a<0,\ 0<a\leqq 4$



$\boxed{5}$

(解説)

(1)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$ のとき，$\cos\theta\geqq 0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{3}\div\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$90°<\theta\leqq180°$ のとき，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{5}{9}}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{3}\div\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

よって　$(\cos\theta,\ \tan\theta)=\left(\frac{\sqrt{5}}{3},\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{5}}{3},\ -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

(2)　$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ から　$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

よって　$\cos^2\theta=\frac{4}{5}$

$\tan\theta=\frac{1}{2}>0$ より，$0°<\theta<90°$ であるから　$\cos\theta>0$

ゆえに　$\cos\theta=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\boxed{6}$

(解説)

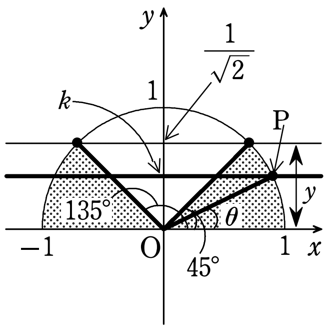
(1)　不等式は　$\sin\theta\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ を解くと

$\theta=45°,\ 135°$

よって，右の図から，求める θ の範囲は

$0°\leqq\theta\leqq45°,\ 135°\leqq\theta\leqq180°$



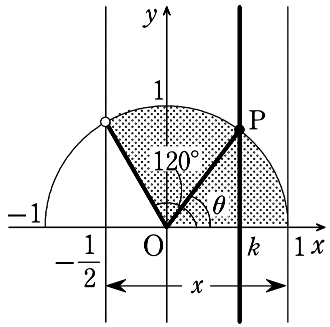
(2)　不等式は　$\cos\theta>-\frac{1}{2}$

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ を解くと

$\theta=120°$

よって，右の図から，求める θ の範囲は

$0°\leqq\theta<120°$

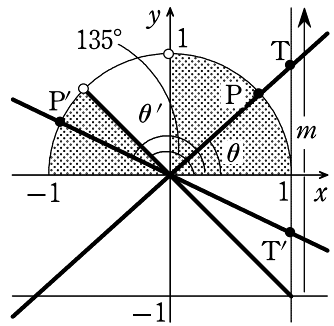


(3)　$\tan\theta=-1$ を解くと

$\theta=135°$

よって，右の図から，求める θ の範囲は

$0°\leqq\theta<90°,\ 135°<\theta\leqq180°$



$\boxed{7}$

(解説)

(1)　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ であるから　$2(1-\sin^2\theta)+3\sin\theta-3=0$

整理すると　$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき　$0\leqq t\leqq1$　……①

方程式は　$2t^2-3t+1=0$

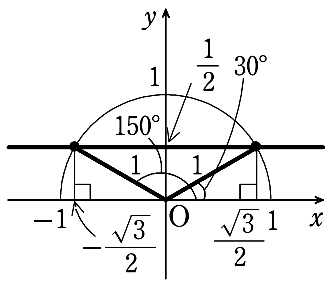
ゆえに　$(t-1)(2t-1)=0$

よって　$t=1,\ \frac{1}{2}$　これらは①を満たす。

$t=1$　すなわち　$\sin\theta=1$ を解いて　$\theta=90°$

$t=\frac{1}{2}$　すなわち　$\sin\theta=\frac{1}{2}$ を解いて　$\theta=30°,\ 150°$

以上から　$\theta=30°,\ 90°,\ 150°$



(2)　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であるから　$\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{3}{2}$　ゆえに　$2\sin^2\theta=-3\cos\theta$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから　$2(1-\cos^2\theta)=-3\cos\theta$

整理して　$2\cos^2\theta-3\cos\theta-2=0$

$\cos\theta=t$ とおくと，$90^\circ<\theta\leqq 180^\circ$ のとき　$-1\leqq t<0$　…… ①

方程式は　$2t^2-3t-2=0$

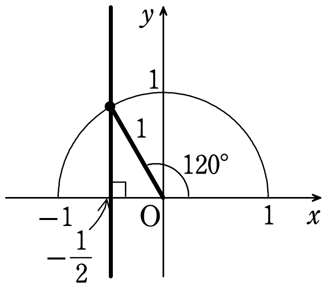
ゆえに　$(t-2)(2t+1)=0$

よって　$t=2,\ -\dfrac{1}{2}$

① を満たすものは　$t=-\dfrac{1}{2}$

求める解は，$t=-\dfrac{1}{2}$ すなわち $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ を解いて

$\theta=120^\circ$



$\boxed{8}$

(解説)

(1)　$\mathrm{CD}=\mathrm{BD}-\mathrm{BC}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{AB}^2}-1$

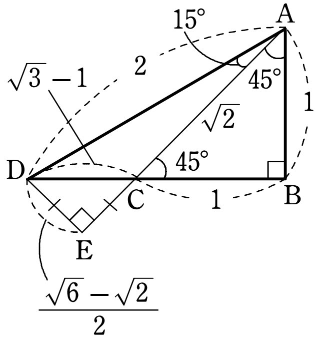
$=\sqrt{2^2-1^2}-1=\sqrt{3}-1$

$\triangle\mathrm{CDE}$ は $\angle\mathrm{E}=90^\circ$ の直角二等辺三角形であるから

$\mathrm{DE}=\mathrm{CE}=\dfrac{\mathrm{CD}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

また，$\mathrm{AC}=\sqrt{2}\,\mathrm{BC}=\sqrt{2}$ であるから

$\mathrm{AE}=\mathrm{AC}+\mathrm{CE}=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$



(2)　直角三角形 ADE において

$\sin 15^\circ=\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\div 2=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos 15^\circ=\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\div 2=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\tan 15^\circ=\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AE}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\div\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\dfrac{8-2\sqrt{12}}{6-2}=\dfrac{8-4\sqrt{3}}{4}=2-\sqrt{3}$