【定期試験対策講習】

１学期
中間考査
対策教材①

中３甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｙ「式と証明」整式のわり算，等式など
数学Ｔ「図形と方程式」点と直線

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

次の計算をせよ。(4) は簡単にせよ。

(1) $\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}-\dfrac{x}{x^2-9}$　　(2) $\dfrac{1}{a(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+4)}+\dfrac{1}{(a+4)(a+6)}$

(3) $\dfrac{x+4}{x+2}-\dfrac{x+5}{x+1}-\dfrac{x-5}{x-1}+\dfrac{x-4}{x-2}$　　(4) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x+1}}}$

$\boxed{2}$

$2x^3+ax+10$ を x^2-3x+b で割ると，余りが $3x-2$ になる。このとき，定数 a，b の値を求めよ。

$\boxed{3}$

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$$

$\boxed{4}$

$a+b+c=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}=3$$

$\boxed{5}$

$2(ab+bc+ca)=abc$，$a+b+c=2$ のとき，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 2 であることを示せ。

$\boxed{6}$

3 点 A$(5,\ 4)$，B$(0,\ -1)$，C$(8,\ -2)$ について，線分 AB を $2:3$ に外分する点を P，$3:2$ に外分する点を Q とし，△ABC の重心を G とする。

(1) 線分 PQ の中点 M の座標を求めよ。

(2) 点 G の座標を求めよ。

(3) △PQS の重心が点 G と一致するように，点 S の座標を定めよ。

$\boxed{7}$

点 $(-3,\ 2)$ を通り，直線 $3x-4y-6=0$ に平行な直線 ℓ と垂直な直線 ℓ' の方程式をそれぞれ求めよ。

$\boxed{8}$

2 直線 $x+y-4=0$ ……①，$2x-y+1=0$ ……② の交点を通り，次の条件を満たす直線の方程式を，それぞれ求めよ。

(1) 点 $(-1,\ 2)$ を通る　　(2) 直線 $x+2y+2=0$ に平行

$\boxed{9}$

k は定数とする。直線 $(k+3)x-(2k-1)y-8k-3=0$ は，k の値に関係なく定点 A を通る。その定点 A の座標を求めよ。

$\boxed{10}$

直線 $x+2y-3=0$ を ℓ とする。次のものを求めよ。

(1) 直線 ℓ に関して，点 P$(0,\ -2)$ と対称な点 Q の座標

(2) 直線 ℓ に関して，直線 $m:3x-y-2=0$ と対称な直線 n の方程式

$\boxed{11}$

点 $(2,\ 1)$ から直線 $kx+y+1=0$ に下ろした垂線の長さが $\sqrt{3}$ であるとき，定数 k の値を求めよ。

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答 (1) $-\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$ (2) $\dfrac{3}{a(a+6)}$

(3) $-\dfrac{24}{(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)}$ (4) $\dfrac{x+2}{2x+3}$

$\boxed{2}$

解答 $a=-11$，$b=2$

$\boxed{3}$

解答 略

$\boxed{4}$

解答 略

$\boxed{5}$

解答 略

$\boxed{6}$

解答 (1) $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ (2) $\left(\dfrac{13}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ (3) $(8,\ -2)$

$\boxed{7}$

解答 $\ell : 3x-4y+17=0$，$\ell' : 4x+3y+6=0$

$\boxed{8}$

解答 (1) $x-2y+5=0$ (2) $x+2y-7=0$

$\boxed{9}$

解答 $(2,\ -3)$

$\boxed{10}$

解答 (1) $\left(\dfrac{14}{5},\ \dfrac{18}{5}\right)$ (2) $13x-9y-4=0$

$\boxed{11}$

解答 $k=-4\pm\sqrt{15}$

$\boxed{1}$

解説

(1) $$\frac{x+1}{x^2+2x-3}-\frac{x}{x^2-9}=\frac{x+1}{(x-1)(x+3)}-\frac{x}{(x+3)(x-3)}$$
$$=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+3)(x-3)}-\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+3)(x-3)}$$
$$=\frac{(x+1)(x-3)-x(x-1)}{(x-1)(x+3)(x-3)}=\frac{-(x+3)}{(x-1)(x+3)(x-3)}$$
$$=-\frac{1}{(x-1)(x-3)}$$

(2) $$(与式)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+4}-\frac{1}{a+6}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+6}\right)=\frac{(a+6)-a}{2a(a+6)}=\frac{3}{a(a+6)}$$

(3) $$\frac{x+4}{x+2}-\frac{x+5}{x+1}-\frac{x-5}{x-1}+\frac{x-4}{x-2}$$
$$=\left(1+\frac{2}{x+2}\right)-\left(1+\frac{4}{x+1}\right)-\left(1-\frac{4}{x-1}\right)+\left(1-\frac{2}{x-2}\right)$$
$$=\frac{2}{x+2}-\frac{4}{x+1}+\frac{4}{x-1}-\frac{2}{x-2}=2\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}\right)-4\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)$$
$$=\frac{2\{(x-2)-(x+2)\}}{(x+2)(x-2)}-\frac{4\{(x-1)-(x+1)\}}{(x+1)(x-1)}=\frac{-8}{(x+2)(x-2)}+\frac{8}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{8\{-(x+1)(x-1)+(x+2)(x-2)\}}{(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)}=-\frac{24}{(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)}$$

(4) $$(与式)=\frac{1+\dfrac{1}{x+1}}{\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)+1}=\frac{(x+1)+1}{2(x+1)+1}=\frac{x+2}{2x+3}$$

別解 1. $$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x+1}}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{x+2}{x+1}}}=\frac{1}{1+\dfrac{x+1}{x+2}}=\frac{1}{\dfrac{2x+3}{x+2}}$$
$$=\frac{x+2}{2x+3}$$

別解 2. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x+1}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{x+1}{(x+1)+1}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{x+1}{x+2}}=\dfrac{x+2}{2x+3}$

2

解説

商は $2x+c$ とおける。

条件から　$2x^3+ax+10=(x^2-3x+b)(2x+c)+3x-2$

右辺を x について整理すると

$$2x^3+ax+10=2x^3+(c-6)x^2+(2b-3c+3)x+bc-2$$

これが x についての恒等式であるから，両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$c-6=0,\quad 2b-3c+3=a,\quad bc-2=10$$

これを解いて　$c=6$，$b=2$，$a=-11$

別解　$2x^3+ax+10$ を x^2-3x+b で実際に割ると，余りは

$$(a-2b+18)x-6b+10$$

となる。

$$\begin{array}{r}
2x+6 \\
x^2-3x+b\,\big)\overline{\,2x^3+ax+10} \\
\underline{2x^3-6x^2+2bx} \\
6x^2+(a-2b)x+10 \\
\underline{6x^2-18x+6b} \\
(a-2b+18)x-6b+10
\end{array}$$

これが $3x-2$ に等しいから

$$a-2b+18=3,\quad -6b+10=-2$$

これを解いて　$a=-11$，$b=2$

3

解説

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと　$x=ak$，$y=bk$，$z=ck$

よって　$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{(a^2+b^2+c^2)k^2}{a^2+b^2+c^2}=k^2$

$$\frac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}=\frac{ak\cdot bk+bk\cdot ck+ck\cdot ak}{ab+bc+ca}=\frac{abk^2+bck^2+cak^2}{ab+bc+ca}$$

$$=\frac{(ab+bc+ca)k^2}{ab+bc+ca}=k^2$$

したがって　$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$

4

解説

$a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ であるから

$$(\text{左辺})=\frac{a^2}{(a+b)(-b)}+\frac{b^2}{(-a)(b+a)}+\frac{(a+b)^2}{(-b)(-a)}$$

$$=\frac{-a^3-b^3+(a+b)^3}{ab(a+b)}=\frac{3a^2b+3ab^2}{ab(a+b)}=\frac{3ab(a+b)}{ab(a+b)}=3$$

したがって，等式は証明された。

別解　$a+b+c=0$ より，

$a+b=-c$，$a+c=-b$，$b+c=-a$ であるから

$$(\text{左辺})=\frac{a^2}{(-c)(-b)}+\frac{b^2}{(-a)(-c)}+\frac{c^2}{(-b)(-a)}$$

$$=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{a^3+b^3+c^3-3abc+3abc}{abc}$$

$$=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{abc}$$

$$=\frac{3abc}{abc}=3$$

したがって，等式は証明された。

5

解説

$$\begin{aligned}(a-2)(b-2)(c-2)&=\{ab-2(a+b)+4\}(c-2)\\&=abc-2ab-2(a+b)c+4(a+b)+4c-8\\&=abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8\\&=abc-abc+4\cdot2-8=0\end{aligned}$$

よって　$a-2=0$　または　$b-2=0$　または　$c-2=0$

したがって，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 2 である。

$\boxed{6}$

(解説)

(1)　P の座標は $\left(\dfrac{-3\cdot5+2\cdot0}{2-3},\ \dfrac{-3\cdot4+2\cdot(-1)}{2-3}\right)$ から　$(15,\ 14)$

　Q の座標は $\left(\dfrac{-2\cdot5+3\cdot0}{3-2},\ \dfrac{-2\cdot4+3\cdot(-1)}{3-2}\right)$ から　$(-10,\ -11)$

よって，線分 PQ の中点 M の座標は

$$\left(\frac{15+(-10)}{2},\ \frac{14+(-11)}{2}\right)\ \text{すなわち}\ \left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

(2)　G の座標は $\left(\dfrac{5+0+8}{3},\ \dfrac{4+(-1)+(-2)}{3}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{13}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

(3)　$\mathrm{S}(x,\ y)$ とすると，(1) から，△PQS の重心の座標は

$$\left(\frac{15+(-10)+x}{3},\ \frac{14+(-11)+y}{3}\right)\ \text{から}\ \left(\frac{5+x}{3},\ \frac{3+y}{3}\right)$$

これが点 G の座標と一致するとき　$\dfrac{5+x}{3}=\dfrac{13}{3},\ \dfrac{3+y}{3}=\dfrac{1}{3}$

よって　$x=8,\ y=-2$　すなわち　$\mathrm{S}(8,\ -2)$

$\boxed{7}$

(解説)

直線 $3x-4y-6=0$ の傾きは $\dfrac{3}{4}$ である。

よって，直線 ℓ の傾きは $\dfrac{3}{4}$ であり，その方程式は

$$y-2=\frac{3}{4}\{x-(-3)\}\quad\text{すなわち}\quad 3x-4y+17=0$$

次に，直線 ℓ' の傾きを m とすると，$\dfrac{3}{4}m=-1$ から　$m=-\dfrac{4}{3}$

よって，直線 ℓ' の方程式は

$$y-2=-\frac{4}{3}\{x-(-3)\}\quad\text{すなわち}\quad 4x+3y+6=0$$

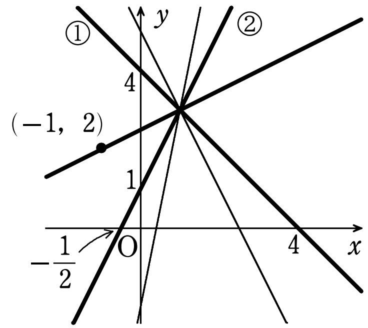
$\boxed{8}$

(解説)

k は定数とする。方程式

$$k(x+y-4)+2x-y+1=0\quad\cdots\cdots③$$

は，2 直線 ①，② の交点を通る直線を表す。



(1)　直線 ③ が点 $(-1,\ 2)$ を通るから

　$-3k-3=0$　すなわち　$k=-1$

これを ③ に代入して

　$-(x+y-4)+2x-y+1=0$

すなわち　$x-2y+5=0$

(2)　③ を $x,\ y$ について整理して

$$(k+2)x+(k-1)y-4k+1=0$$

直線 ③ が直線 $x+2y+2=0$ に平行であるための条件は

　$(k+2)\cdot2-(k-1)\cdot1=0$　　よって　$k=-5$

これを ③ に代入して　$-5(x+y-4)+2x-y+1=0$

すなわち　$x+2y-7=0$

$\boxed{9}$

(解説)

$(k+3)x-(2k-1)y-8k-3=0$ $\cdots\cdots$ ① とする。

① を k について整理すると

$$k(x-2y-8)+3x+y-3=0$$

この等式が k の値に関係なく成り立つための条件は

$$x-2y-8=0,\ 3x+y-3=0$$

この連立方程式を解いて　$x=2,\ y=-3$

よって，求める定点 A の座標は　$(2,\ -3)$

別解　k の値に関係なく ① が成り立つから，$k=-3,\ \dfrac{1}{2}$ のときも成り立つ。

$k=-3$ のとき　$0\cdot x-\{2\cdot(-3)-1\}y-8\cdot(-3)-3=0$

整理して　$7y+21=0$　　よって　$y=-3$

$k=\dfrac{1}{2}$ のとき　　$\left(\dfrac{1}{2}+3\right)x-0\cdot y-8\cdot\dfrac{1}{2}-3=0$

整理して　　$\dfrac{7}{2}x-7=0$　　　　よって　　$x=2$

逆に，$x=2$，$y=-3$ を ① の左辺に代入すると

$$(k+3)\cdot 2-(2k-1)\cdot(-3)-8k-3=0$$

となり，① は k の値に関係なく成り立つ。

したがって　　$x=2$，$y=-3$

よって，求める定点 A の座標は　　$(2,\ -3)$

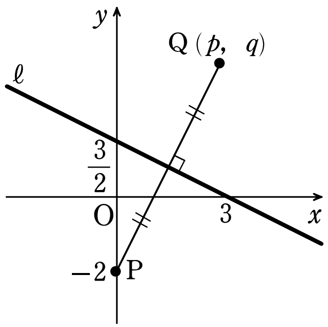
$\boxed{10}$

(解説)

(1)　点 Q の座標を $(p,\ q)$ とする。

直線 PQ は ℓ に垂直であるから

$$\frac{q+2}{p}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$



ゆえに　　$2p-q-2=0$　……①

線分 PQ の中点 $\left(\dfrac{p}{2},\ \dfrac{q-2}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にある

から　　$\dfrac{p}{2}+2\cdot\dfrac{q-2}{2}-3=0$

ゆえに　　$p+2q-10=0$　……②

①，② を解いて　　$p=\dfrac{14}{5}$，$q=\dfrac{18}{5}$　　　　よって　　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{14}{5},\ \dfrac{18}{5}\right)$

(2)　ℓ，m の方程式を連立して解くと　　$x=1$，$y=1$

ゆえに，2 直線 ℓ，m の交点 R の座標は　　$(1,\ 1)$

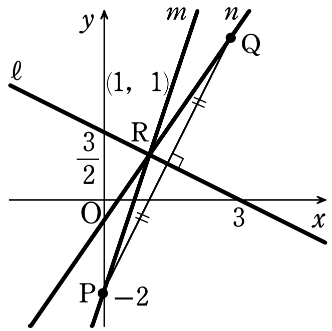
また，点 P の座標を直線 m の方程式に代入すると，

$3\cdot 0-(-2)-2=0$ となるから，点 P は直線 m 上にある。

よって，直線 n は，2 点 Q，R を通るから，その方程

式は　　$\left(\dfrac{18}{5}-1\right)(x-1)-\left(\dfrac{14}{5}-1\right)(y-1)=0$

整理して　　$13x-9y-4=0$



$\boxed{11}$

(解説)

点 $(2,\ 1)$ と直線 $kx+y+1=0$ の距離が $\sqrt{3}$ であるから

$$\frac{|k\cdot 2+1+1|}{\sqrt{k^2+1^2}}=\sqrt{3}\quad すなわち\quad \frac{2|k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$$

両辺を 2 乗して　　$\dfrac{4(k+1)^2}{k^2+1}=3$

整理すると　　$k^2+8k+1=0$

これを解いて　　$k=-4\pm\sqrt{15}$