【定期試験対策講習】

１学期
中間考査
対策教材②

中３女学院数学

【注意事項】

本教材は

数学Ⅰ「２次関数」の２次不等式
数学Ⅰ「三角比」の前半

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

次の式の値を求めよ。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 90°$ とする。

(1) $\cos(90°-\theta)+\cos\theta+\cos(90°+\theta)-\sin(90°+\theta)$

(2) $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin(180°-\theta)+\cos\theta+\cos(180°-\theta)+\sin\theta$

$\boxed{2}$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $(0°<\theta<180°)$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$　　(2) $\sin\theta-\cos\theta$，$\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}$

$\boxed{3}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，関数 $y=\sin^2\theta-\cos\theta$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ の値も求めよ。

$\boxed{4}$

2 次関数 $y=x^2-mx+m^2-3m$ のグラフが次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1) x 軸の正の部分と，異なる 2 点で交わる。

(2) x 軸の正の部分と負の部分で交わる。

$\boxed{5}$

$x^2+y^2=4$ のとき，x^2-y^2+4x の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{6}$

(1) 関数 $y=|x^2+2x|$ のグラフをかけ。

(2) 方程式 $|x^2+2x|=k$ の実数解の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

$\boxed{7}$

(1) 関数 $y=(x^2-6x)^2+12(x^2-6x)+30$ $(1 \leqq x \leqq 5)$ の値域を求めよ。

(2) x，y の 2 次式 $x^2-2xy+5y^2+6x-14y+5$ の最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

$\boxed{8}$

$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲において，常に 2 次不等式 $x^2-2mx+1>0$ が成り立つような定数 m の値の範囲を求めよ。

$\boxed{9}$

(1) 2 次方程式 $2x^2-kx+k+1=0$ が実数解をもたないような，定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) x の方程式 $mx^2+(m-3)x+1=0$ の実数解の個数を求めよ。

$\boxed{10}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $2\sin^2\theta-\cos\theta-1 \leqq 0$　　(2) $2\cos^2\theta+3\sin\theta<3$

$\boxed{11}$

$0°<\theta<180°$ とする。$4\cos\theta+2\sin\theta=\sqrt{2}$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{12}$

$0°<\theta<90°$ とする。$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=3$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin\theta+\cos\theta$

(3) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$　　(4) $\dfrac{1}{\sin^3\theta}+\dfrac{1}{\cos^3\theta}$

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答　(1)　0　　(2)　$\dfrac{2}{3}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

(2)　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}=-2\sqrt{3}$

$\boxed{3}$

解答　$\theta=120^\circ$ のとき最大値 $\dfrac{5}{4}$，$\theta=0^\circ$ のとき最小値 -1

$\boxed{4}$

解答　(1)　$3<m<4$　　(2)　$0<m<3$

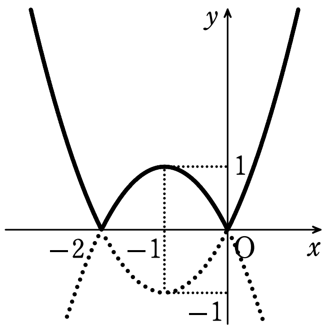
$\boxed{5}$

解答　$x=2$，$y=0$ で最大値 12，$x=-1$，$y=\pm\sqrt{3}$ で最小値 -6

$\boxed{6}$

解答　(1)　［図］

(2)　$k<0$ のとき 0 個，
$k=0$ のとき 2 個，
$0<k<1$ のとき 4 個，
$k=1$ のとき 3 個，
$k>1$ のとき 2 個



$\boxed{7}$

解答　(1)　$-6\leqq y\leqq 3$　　(2)　$x=-2$，$y=1$ のとき最小値 -8

$\boxed{8}$

解答　$m<1$

$\boxed{9}$

解答　(1)　$4-2\sqrt{6}<k<4+2\sqrt{6}$

(2)　$m<0$，$0<m<1$，$9<m$ のとき 2 個；$m=0$，1，9 のとき 1 個；
$1<m<9$ のとき 0 個

$\boxed{10}$

解答　(1)　$0^\circ\leqq\theta\leqq 60^\circ$，$\theta=180^\circ$　　(2)　$0^\circ\leqq\theta<30^\circ$，$150^\circ<\theta\leqq 180^\circ$

$\boxed{11}$

解答　-7

$\boxed{12}$

解答　(1)　$\dfrac{1}{3}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$　　(3)　$\dfrac{2\sqrt{15}}{9}$　　(4)　$6\sqrt{15}$

$\boxed{1}$

解説

(1)　$\cos(90^\circ-\theta)+\cos\theta+\cos(90^\circ+\theta)-\sin(90^\circ+\theta)$
$=\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta-\cos\theta=0$

(2)　$\sin(180^\circ-\theta)+\cos\theta+\cos(180^\circ-\theta)+\sin\theta$
$=\sin\theta+\cos\theta-\cos\theta+\sin\theta$
$=2\sin\theta$
$=\dfrac{2}{3}$

$\boxed{2}$

解説

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$　　よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$　……①

よって　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$$

(2)　$0°<\theta<180°$ では $\sin\theta>0$ であるから，① より　　$\cos\theta<0$

ゆえに　　$\sin\theta-\cos\theta>0$　……②

① から　　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{2}$

よって，② から　　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

また　　$\tan\theta-\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\div\left(-\frac{1}{4}\right)=-2\sqrt{3}$$

3

(解説)

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから

$$y=\sin^2\theta-\cos\theta=(1-\cos^2\theta)-\cos\theta=-\cos^2\theta-\cos\theta+1$$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき

$-1\leqq t\leqq1$　……①

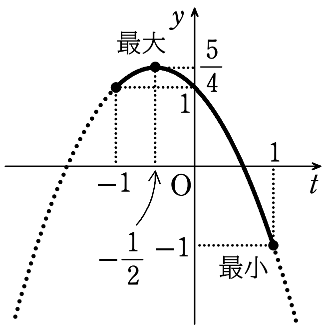
y を t の式で表すと

$$y=-t^2-t+1=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$

① の範囲において，y は

$t=-\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{5}{4}$，

$t=1$ で最小値 -1



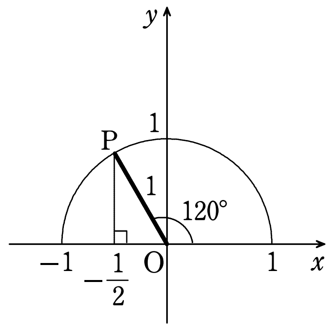
をとる。$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから

$t=-\frac{1}{2}$ となるのは，$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ から　　$\theta=120°$

$t=1$ となるのは，$\cos\theta=1$ から　　$\theta=0°$

よって　　$\theta=120°$ のとき最大値 $\frac{5}{4}$，

$\theta=0°$ のとき最小値 -1

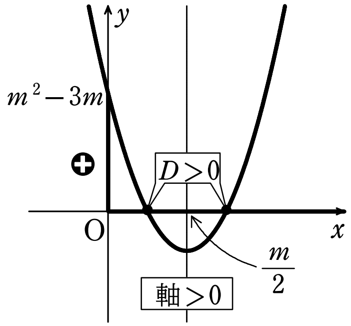


4

(解説)

$f(x)=x^2-mx+m^2-3m$ とし，$f(x)=0$ の判別式を D とする。

(1)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるのは，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。



[1]　グラフと x 軸が異なる 2 点で交わるから

$$D=(-m)^2-4(m^2-3m)=-3m(m-4)>0$$

ゆえに　　$m(m-4)<0$

よって　　$0<m<4$　……①

[2]　グラフの軸は直線 $x=\frac{m}{2}$ で，この軸について

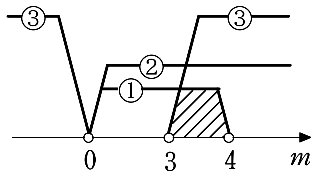
$\frac{m}{2}>0$　　　よって　　$m>0$　……②

[3]　$f(0)>0$ であるから　　$m^2-3m>0$

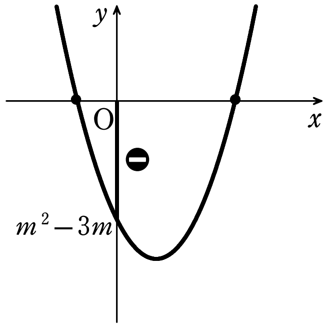
ゆえに　　$m(m-3)>0$

よって　　$m<0$，$3<m$　……③

①，②，③ の共通範囲を求めて　　$3<m<4$



(2)　$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，
x 軸の正の部分と負の部分で交わるのは，
$f(0)=m^2-3m=m(m-3)<0$ のときである。
したがって　　$0<m<3$



$\boxed{5}$

(解説)

$x^2+y^2=4$ から　　$y^2=4-x^2$　…… ①

$y^2 \geqq 0$ であるから　　$4-x^2 \geqq 0$

よって　　$(x+2)(x-2) \leqq 0$　　　　ゆえに　　$-2 \leqq x \leqq 2$　…… ②

$$x^2-y^2+4x=x^2-(4-x^2)+4x$$
$$=2x^2+4x-4=2(x+1)^2-6$$

よって，② の範囲の x について，x^2-y^2+4x は

$x=2$　で最大値 12,

$x=-1$ で最小値 -6　をとる。

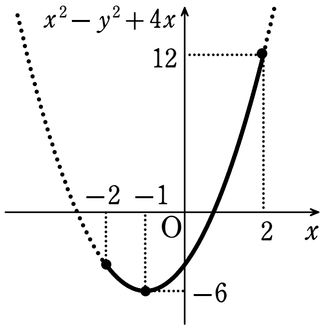
① から

$x=2$　のとき　$y^2=0$　　　よって　$y=0$

$x=-1$ のとき　$y^2=3$　　　よって　$y=\pm\sqrt{3}$

したがって　　$x=2$，$y=0$ で最大値 12

$x=-1$，$y=\pm\sqrt{3}$ で最小値 -6



$\boxed{6}$

(解説)

(1)　$y=|x^2+2x|=|x(x+2)|$

$x(x+2) \geqq 0$ すなわち $x \leqq -2$，$0 \leqq x$ のとき

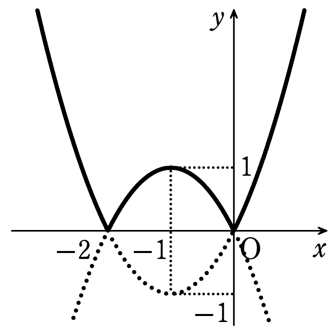
$|x^2+2x|=x^2+2x=(x+1)^2-1$

$x(x+2)<0$ すなわち $-2<x<0$ のとき

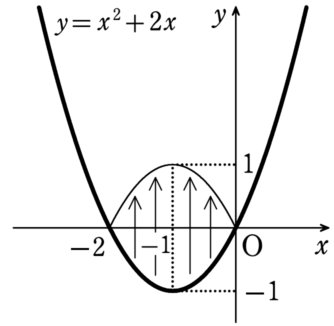
$|x^2+2x|=-(x^2+2x)$

$=-(x+1)^2+1$

よって，関数 $y=|x^2+2x|$ のグラフは，右の図の実線部分のようになる。



別解　まず，$y=x^2+2x$ のグラフをかき，x 軸より下側の部分を x 軸に関して対称に折り返してもよい。



(2)　この方程式の実数解の個数は，$y=|x^2+2x|$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数と一致する。よって，右の図から

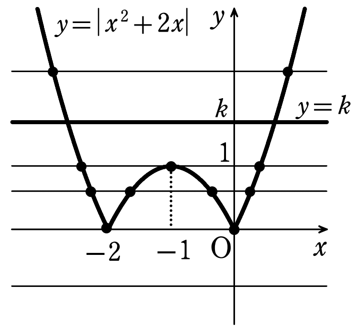
$k<0$ のとき 0 個,

$k=0$ のとき 2 個,

$0<k<1$ のとき 4 個,

$k=1$ のとき 3 個,

$k>1$ のとき 2 個



$\boxed{7}$

(解説)

(1) $x^2-6x=t$ とおくと　　$t=(x-3)^2-9$　$(1\leqq x\leqq 5)$

このグラフは図 [1] の実線部分となる。

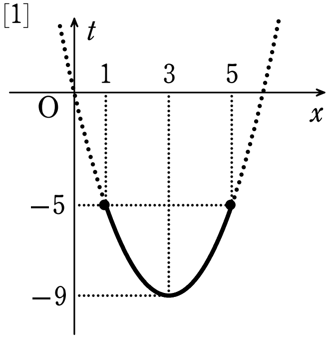
ゆえに，t の変域は　　$-9\leqq t\leqq -5$

よって　　$y=t^2+12t+30=(t+6)^2-6$　$(-9\leqq t\leqq -5)$

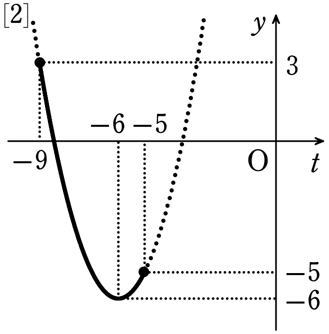
このグラフは図 [2] の実線部分となる。

したがって，求める値域は　　$-6\leqq y\leqq 3$

[1]



[2]



(2) 与式を x の 2 次関数とみて変形すると

$$与式=x^2-2(y-3)x+5y^2-14y+5=\{x-(y-3)\}^2-(y-3)^2+5y^2-14y+5$$

$$=\{x-(y-3)\}^2+4y^2-8y-4=\{x-(y-3)\}^2+4(y-1)^2-8$$

与式は $x=y-3$ で最小値 $4(y-1)^2-8$ をとる。

また，$4(y-1)^2-8$ は $y=1$ で最小値 -8 をとる。

よって，与式は $x=y-3$，$y=1$ のとき最小値 -8 をとる。

すなわち，$x=-2$，$y=1$ のとき最小値 -8 をとる。

$\boxed{8}$

(解説)

$f(x)=x^2-2mx+1$ とすると　　$f(x)=(x-m)^2+1-m^2$

よって，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=m$

$0\leqq x\leqq 2$ で常に $f(x)>0$ が成り立つのは，$0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値が正となるときである。

[1]　$m<0$ のとき

$0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は　　$f(0)=1$

これは正であるから，$m<0$ ……① のとき，条件を満たす。

[2]　$0\leqq m\leqq 2$ のとき

$0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は　　$f(m)=1-m^2$

よって　　$1-m^2>0$　　　すなわち　　$(m+1)(m-1)<0$

ゆえに　　$-1<m<1$

これと $0\leqq m\leqq 2$ の共通範囲は　　$0\leqq m<1$　……②

[3]　$2<m$ のとき

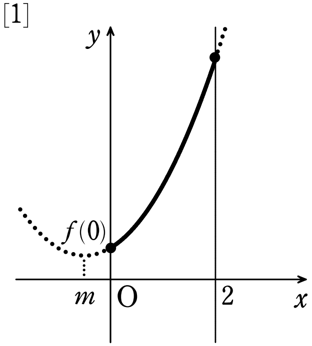
$0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は　　$f(2)=5-4m$

よって　　$5-4m>0$

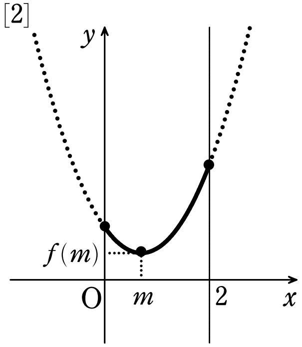
ゆえに　　$m<\dfrac{5}{4}$　　　　これと $m>2$ の共通範囲はない。

求める m の値の範囲は，① と ② の範囲を合わせて　　$m<1$

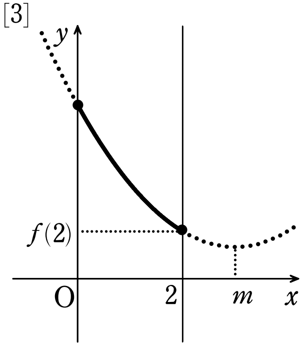
[1]



[2]



[3]



$\boxed{9}$

(解説)

(1) 2 次方程式 $2x^2-kx+k+1=0$ が実数解をもたないための必要十分条件は，判別式を D とすると　　$D=(-k)^2-4\cdot 2(k+1)<0$　　ゆえに　　$k^2-8k-8<0$

$k^2-8k-8=0$ を解くと　　$k=4\pm 2\sqrt{6}$

よって　　$4-2\sqrt{6}<k<4+2\sqrt{6}$

(2) $mx^2+(m-3)x+1=0$ ……① とする。

[1]　$m=0$ のとき，① は　$-3x+1=0$

これを解くと　$x=\dfrac{1}{3}$　　よって，実数解は 1 個。

[2]　$m\neq 0$ のとき，① は 2 次方程式で，判別式を D とすると

$$D=(m-3)^2-4\cdot m\cdot 1=m^2-10m+9=(m-1)(m-9)$$

$D>0$ となるのは，$(m-1)(m-9)>0$ のとき。

これを解いて　$m<1,\ 9<m$

$m\neq 0$ であるから　$m<0,\ 0<m<1,\ 9<m$

このとき，実数解は 2 個。

$D=0$ となるのは，$(m-1)(m-9)=0$ のとき。

これを解いて　$m=1,\ 9$　　このとき，実数解は 1 個。

$D<0$ となるのは，$(m-1)(m-9)<0$ のとき。

これを解いて　$1<m<9$　　このとき，実数解は 0 個。

以上により　$m<0,\ 0<m<1,\ 9<m$ のとき　2 個

$m=0,\ 1,\ 9$ のとき　1 個

$1<m<9$ のとき　0 個

10

解説

(1)　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから　$2(1-\cos^2\theta)-\cos\theta-1\leqq 0$

整理すると　$2\cos^2\theta+\cos\theta-1\geqq 0$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0°\leqq\theta\leqq 180°$ のとき　$-1\leqq t\leqq 1$　…… ①

不等式は　$2t^2+t-1\geqq 0$　　ゆえに　$(t+1)(2t-1)\geqq 0$

よって　$t\leqq -1,\ \dfrac{1}{2}\leqq t$

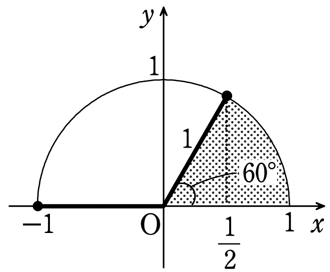
① との共通範囲を求めて　$t=-1,\ \dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$

$t=-1$　すなわち　$\cos\theta=-1$ を解いて

$\theta=180°$

$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$　すなわち　$\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq 1$ を解いて

$0°\leqq\theta\leqq 60°$



以上から　$0°\leqq\theta\leqq 60°,\ \theta=180°$

(2)　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ であるから　$2(1-\sin^2\theta)+3\sin\theta<3$

整理すると　$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1>0$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0°\leqq\theta\leqq 180°$ のとき　$0\leqq t\leqq 1$　…… ①

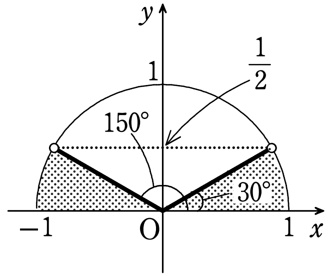
不等式は　$2t^2-3t+1>0$　　ゆえに　$(2t-1)(t-1)>0$

よって　$t<\dfrac{1}{2},\ 1<t$

① との共通範囲を求めて　$0\leqq t<\dfrac{1}{2}$

求める解は，$0\leqq t<\dfrac{1}{2}$　すなわち　$0\leqq\sin\theta<\dfrac{1}{2}$

を解いて　$0°\leqq\theta<30°,\ 150°<\theta\leqq 180°$



11

解説

$4\cos\theta+2\sin\theta=\sqrt{2}$ から　$4\cos\theta=\sqrt{2}-2\sin\theta$　…… ①

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$16\sin^2\theta+16\cos^2\theta=16$　…… ②

① を ② に代入して　$16\sin^2\theta+(\sqrt{2}-2\sin\theta)^2=16$

整理すると　$10\sin^2\theta-2\sqrt{2}\sin\theta-7=0$

これを $\sin\theta$ についての 2 次方程式とみて，$\sin\theta$ について解くと

$$\sin\theta=\frac{-(-\sqrt{2})\pm\sqrt{(-\sqrt{2})^2-10\cdot(-7)}}{10}=\frac{\sqrt{2}\pm 6\sqrt{2}}{10}$$

すなわち　$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

$0°<\theta<180°$ より $0<\sin\theta\leqq 1$ であるから　$\sin\theta=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

このとき，① から　$4\cos\theta=\sqrt{2}-2\cdot\dfrac{7\sqrt{2}}{10}=-\dfrac{4\sqrt{2}}{10}$

よって　$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

したがって　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}\div\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{10}\right)=-7$

別解　$\cos\theta\neq 0$ であるから，等式を $\cos\theta$ で割って　$4+2\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos\theta}$　……③

ゆえに　$\dfrac{1}{\cos\theta}=\sqrt{2}(\tan\theta+2)$

これと $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$ から $\cos\theta$ を消去して　$\tan^2\theta+8\tan\theta+7=0$

よって　$\tan\theta=-1,\ -7$

ゆえに　$90°<\theta<180°$

$\tan\theta=-1$ のときは $\theta=135°$ で，与えられた等式を満たさないから，不適。

$\tan\theta=-7$ のときは ③ から $\cos\theta<0$ となり，適する。

したがって　$\tan\theta=-7$

12

解説

(1)　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=3$ であるから　$\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=3$

したがって　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

(2)　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$$=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

$0°<\theta<90°$ より，$\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$ であるから

$\sin\theta+\cos\theta>0$

よって　$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\dfrac{5}{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

(3)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$=\frac{\sqrt{15}}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\sqrt{15}}{9}$$

(4)　$\dfrac{1}{\sin^3\theta}+\dfrac{1}{\cos^3\theta}=\dfrac{\cos^3\theta+\sin^3\theta}{\sin^3\theta\cos^3\theta}=\dfrac{2\sqrt{15}}{9}\div\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{2\sqrt{15}}{9}\cdot 27=6\sqrt{15}$