【定期試験対策講習】

１学期
中間考査
対策教材②

中３甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｙ「式と証明」二項定理，不等式の証明
数学Ｔ「図形と方程式」円

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

次の式の展開式における［　］内の項の係数を求めよ。

$\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^9$　［定数項］

$\boxed{2}$

(1)　$(2x-y-5z)^6$ の展開式で，x^2y^3z の係数を求めよ。

(2)　$(x^2-2x+3)^6$ の展開式で，x^4 の係数を求めよ。

$\boxed{3}$

次のような円の方程式を求めよ。

(1)　2 点 $(-3,\ 6)$，$(3,\ -2)$ を直径の両端とする

(2)　中心が直線 $y=x+5$ 上にあり，原点と点 $(1,\ 2)$ を通る円

(3)　点 $(1,\ 2)$ を通り，x 軸と y 軸の両方に接する円

$\boxed{4}$

3 点 A $(2,\ 1)$，B $(6,\ 3)$，C $(-1,\ 2)$ がある。

(1)　3 点 A，B，C を通る円の方程式を求めよ。

(2)　△ABC の外心の座標と，外接円の半径を求めよ。

$\boxed{5}$

方程式 $x^2+y^2+2mx-2(m-1)y+5m^2=0$ が円を表すとき，定数 m の値の範囲を求めよ。また，この円の半径を最大にする m の値を求めよ。

$\boxed{6}$

円 $x^2+y^2=25$ と直線 $y=3x+k$ が共有点をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ。
また，接するとき，定数 k の値と接点の座標を求めよ。

$\boxed{7}$

(1)　点 $(7,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式と，そのときの接点の座標を求めよ。

(2)　円 $x^2+y^2=8$ の接線で，直線 $7x+y=0$ に垂直である直線の方程式を求めよ。

$\boxed{8}$

平面上に 2 点 A $(-2,\ 0)$，B $(0,\ 1)$ をとる。点 P が放物線 $y=-x^2$ 上を動くとき，△ABP の面積の最小値を求めよ。また，そのときの P の座標を求めよ。

$\boxed{9}$

次の不等式を証明せよ。

(1)　$2\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{4a+b}$　（ただし，$a>0$，$b>0$ とする。）

(2)　$|a|-|b|\leqq|a-b|$

$\boxed{10}$

次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。
ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(1)　$x^2-2xy+5y^2+2x+2y+2\geqq0$　　(2)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq9$

$\boxed{11}$

次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　${}_nC_0-\dfrac{{}_nC_1}{2}+\dfrac{{}_nC_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{{}_nC_n}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}$

(2)　n が奇数のとき　${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$

(3)　n が偶数のとき　${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}=2^{n-1}$

【解答&解説】

$\boxed{1}$

解答　5376

$\boxed{2}$

解答　(1)　1200　　(2)　9855

$\boxed{3}$

解答　(1)　$x^2+(y-2)^2=25$　　(2)　$\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}$

(3)　$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，$(x-5)^2+(y-5)^2=25$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$x^2+y^2-4x-12y+15=0$　　(2)　外心の座標 $(2,\ 6)$，外接円の半径 5

$\boxed{5}$

解答　円を表すとき $-1<m<\dfrac{1}{3}$，　半径は $m=-\dfrac{1}{3}$ で最大

$\boxed{6}$

解答　(前半)　$-5\sqrt{10}\leqq k\leqq 5\sqrt{10}$

(後半)　$k=5\sqrt{10}$ のとき，接点 $\left(-\dfrac{3\sqrt{10}}{2},\ \dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$，

$k=-5\sqrt{10}$ のとき，接点 $\left(\dfrac{3\sqrt{10}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$3x+4y=25$，$(3,\ 4)$；$4x-3y=25$，$(4,\ -3)$

(2)　$x-7y+20=0$，$x-7y-20=0$

$\boxed{8}$

解答　$\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{16}\right)$ のとき最小値 $\dfrac{15}{16}$

$\boxed{9}$

解答　(1)　略　　(2)　略

$\boxed{10}$

解答　(1)　証明は略，等号成立は $x=-\dfrac{3}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$ のとき

(2)　証明略，$ab=2$

$\boxed{11}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

$\boxed{1}$

解説

展開式の一般項は　$_9\mathrm{C}_r(x^2)^{9-r}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^r={}_9\mathrm{C}_r\cdot(-2)^r\dfrac{x^{2(9-r)}}{x^r}$

これが定数項となるとき　$\dfrac{x^{2(9-r)}}{x^r}=1$　　よって　$x^{18-2r}=x^r$

両辺の x の指数を比較して　$18-2r=r$　　ゆえに　$r=6$

よって，定数項は　$_9\mathrm{C}_6\cdot(-2)^6=84\cdot 64=5376$

$\boxed{2}$

解説

(1)　求める係数は　$\dfrac{6!}{2!3!1!}\cdot 2^2\cdot(-1)^3\cdot(-5)^1=1200$

別解　$\{(2x-y)-5z\}^6$ の展開式において，z を含む項は

$$_6\mathrm{C}_1(2x-y)^5\cdot(-5z)={}_6\mathrm{C}_1\cdot(-5)(2x-y)^5z$$
$$=-30(2x-y)^5z$$

$(2x-y)^5$ の展開式において，x^2y^3 の項は

$$_5\mathrm{C}_3(2x)^2(-y)^3={}_5\mathrm{C}_3\cdot 2^2\cdot(-1)^3x^2y^3=-40x^2y^3$$

よって，x^2y^3z の項の係数は　$(-30)\times(-40)=1200$

(2)　展開式の一般項は

$$\frac{6!}{p!q!r!}(x^2)^p(-2x)^q\cdot 3^r=\frac{6!}{p!q!r!}(-2)^q\cdot 3^rx^{2p+q}$$

ただし　$p+q+r=6$，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$r\geqq 0$　……①

x^4 の項は $2p+q=4$ のときで，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$ であるから

$$p=0,\ 1,\ 2$$

よって，$2p+q=4$ と $p+q+r=6$ を満たす負でない整数 p，q，r の組は

$$(p,\ q,\ r)=(0,\ 4,\ 2),\ (1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 0,\ 4)$$

したがって，求める係数は

$$\frac{6!}{0!4!2!}(-2)^4\cdot 3^2+\frac{6!}{1!2!3!}(-2)^2\cdot 3^3+\frac{6!}{2!0!4!}(-2)^0\cdot 3^4$$

$$=2160+6480+1215=9855$$

3

解説

(1) 円の中心は，2 点 $(-3,\ 6)$，$(3,\ -2)$ を結ぶ線分の中点で，

その座標は $\left(\frac{-3+3}{2},\ \frac{6-2}{2}\right)$ すなわち $(0,\ 2)$

半径 r は中心 $(0,\ 2)$ と点 $(-3,\ 6)$ の距離で

$$r^2=(-3-0)^2+(6-2)^2=25$$

よって，求める円の方程式は $x^2+(y-2)^2=25$

(1) 中心は直線 $y=x+5$ 上にあるから，その座標を

$(a,\ a+5)$ とおく。

半径を r とすると，円の方程式は $(x-a)^2+(y-a-5)^2=r^2$

これが原点と点 $(1,\ 2)$ を通るから

$$(0-a)^2+(0-a-5)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ①$$

$$(1-a)^2+(2-a-5)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ②$$

① から $2a^2+10a+25=r^2$ ……③

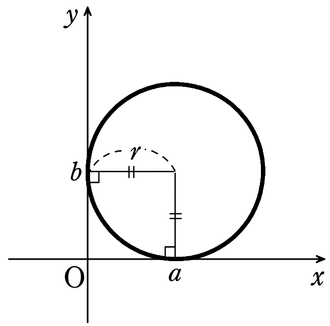
② から $2a^2+4a+10=r^2$ ……④

③，④ から r^2 を消去して $2a^2+10a+25=2a^2+4a+10$

これを解いて $a=-\frac{5}{2}$ このとき，③ から $r^2=\frac{25}{2}$

したがって，求める円の方程式は $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$

(3) x 軸，y 軸に接し，点 $(1,\ 2)$ を通るから，円の中心は第 1 象限にある。



円の中心の座標を $(a,\ b)$，半径を r とすると，

$a>0$，$b>0$ で $a=b=r$

よって，円の方程式は $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

これが点 $(1,\ 2)$ を通るから

$$(1-r)^2+(2-r)^2=r^2$$

ゆえに $r^2-6r+5=0$

これを解いて $r=1,\ 5$

したがって，求める円の方程式は $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，$(x-5)^2+(y-5)^2=25$

4

解説

(1) 求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。

この円が A $(2,\ 1)$ を通るから $2^2+1^2+l\cdot 2+m\cdot 1+n=0$

よって $2l+m+n=-5$ ……①

B $(6,\ 3)$ を通るから $6^2+3^2+l\cdot 6+m\cdot 3+n=0$

よって $6l+3m+n=-45$ ……②

C $(-1,\ 2)$ を通るから $(-1)^2+2^2+l\cdot(-1)+m\cdot 2+n=0$

よって $-l+2m+n=-5$ ……③

②−① から $4l+2m=-40$ ゆえに $2l+m=-20$ ……④

②−③ から $7l+m=-40$ ……⑤

④，⑤ から $l=-4$，$m=-12$

これらを ① に代入して $2\cdot(-4)-12+n=-5$ よって $n=15$

したがって，求める円の方程式は $x^2+y^2-4x-12y+15=0$

(2) (1) で求めた円が △ABC の外接円であり，その方程式 $x^2+y^2-4x-12y+15=0$ を変形すると $(x^2-4x+2^2)+(y^2-12y+6^2)=-15+2^2+6^2$

すなわち $(x-2)^2+(y-6)^2=5^2$

よって，△ABC の外心の座標は $(2,\ 6)$，外接円の半径は 5 である。

$\boxed{5}$

(解説)

方程式を変形すると

$$(x^2+2mx+m^2)+\{y^2-2(m-1)y+(m-1)^2\}=-5m^2+m^2+(m-1)^2$$

すなわち　$(x+m)^2+\{y-(m-1)\}^2=-3m^2-2m+1$

この方程式が円を表すための必要十分条件は　$-3m^2-2m+1>0$

よって　$(m+1)(3m-1)<0$　　ゆえに　$-1<m<\dfrac{1}{3}$　……①

円の半径を r とすると　$r^2=-3m^2-2m+1=-3\left(m+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}$

① の範囲で，r^2 は $m=-\dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{4}{3}$ をとる。

$r>0$ であるから，このとき r も最大となる。

よって，半径を最大にする m の値は　$m=-\dfrac{1}{3}$

参考　半径の最大値は　$\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{6}$

(解説)

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 & \cdots\cdots ① \\ y=3x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② を ① に代入して　$x^2+(3x+k)^2=25$

よって　$10x^2+6kx+k^2-25=0$　……③

この 2 次方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(3k)^2-10(k^2-25)=-k^2+250$

(前半)　円 ① と直線 ② が共有点をもつための必要十分条件は

$D\geqq 0$　すなわち　$-k^2+250\geqq 0$

よって　$k^2-250\leqq 0$　　これを解いて　$-5\sqrt{10}\leqq k\leqq 5\sqrt{10}$

(後半)　円 ① と直線 ② が接するための必要十分条件は

$D=0$　すなわち　$-k^2+250=0$

これを解いて　$k=\pm 5\sqrt{10}$

[1]　$k=5\sqrt{10}$ のとき

接点の x 座標は，③ から　$x=-\dfrac{6k}{2\cdot 10}=-\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$

接点の y 座標は，② から　$y=3\cdot\left(-\dfrac{3\sqrt{10}}{2}\right)+5\sqrt{10}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

よって，接点の座標は　$\left(-\dfrac{3\sqrt{10}}{2},\ \dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$

[2]　$k=-5\sqrt{10}$ のとき

接点の x 座標は，③ から　$x=-\dfrac{6k}{2\cdot 10}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$

接点の y 座標は，② から　$y=3\cdot\dfrac{3\sqrt{10}}{2}-5\sqrt{10}=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

よって，接点の座標は　$\left(\dfrac{3\sqrt{10}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$

参考　接点の x 座標を求める際に，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の重解が $x=-\dfrac{b}{2a}$ であることを利用した。

別解　$y=3x+k$ から　$3x-y+k=0$

円の中心 (0，0) と直線の距離を d とすると　$d=\dfrac{|k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{10}}$

また，円の半径は　5

(前半)　円と直線が共有点をもつための必要十分条件は

$d\leqq 5$　すなわち　$\dfrac{|k|}{\sqrt{10}}\leqq 5$

よって　$|k|\leqq 5\sqrt{10}$　　ゆえに　$-5\sqrt{10}\leqq k\leqq 5\sqrt{10}$

(後半)　円と直線が接するための必要十分条件は

$d=5$　すなわち　$\dfrac{|k|}{\sqrt{10}}=5$

よって　$|k|=5\sqrt{10}$　　ゆえに　$k=\pm 5\sqrt{10}$

[1]　$k=5\sqrt{10}$ のとき

直線の方程式は　　$y=3x+5\sqrt{10}$　……④

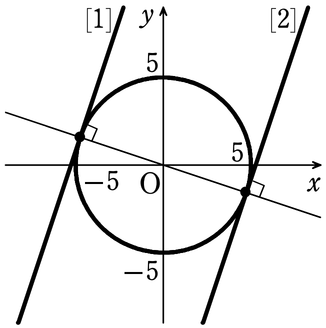
円の中心 (0，0) を通り，④ に垂直な直線の方程式は　　$y=-\dfrac{1}{3}x$　……⑤

2 直線 ④，⑤ の交点が，求める接点である。

④，⑤ を連立して解くと

$$x=-\frac{3\sqrt{10}}{2},\quad y=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

よって，接点の座標は　　$\left(-\dfrac{3\sqrt{10}}{2},\ \dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$



[2]　$k=-5\sqrt{10}$ のとき　[1] と同様にして，接点の座標を求めると

$$\left(\frac{3\sqrt{10}}{2},\ -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$$

7

(解説)

(1)　接点を P$(x_1,\ y_1)$ とすると

$x_1{}^2+y_1{}^2=25$　……①

点 P におけるこの円の接線の方程式は

$x_1x+y_1y=25$

この直線が点 (7，1) を通るから

$7x_1+y_1=25$　……②

①，② から y_1 を消去して整理すると

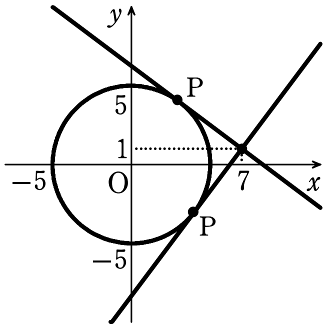
$x_1{}^2-7x_1+12=0$

よって　　$(x_1-3)(x_1-4)=0$　　　ゆえに　　$x_1=3,\ 4$

② に代入して　　$x_1=3$ のとき　$y_1=4$，　$x_1=4$ のとき　$y_1=-3$

したがって，求める接線の方程式と接点の座標は

$3x+4y=25$，(3，4)；　$4x-3y=25$，(4，−3)



別解 1　点 (7，1) を通る接線は，x 軸に垂直でないから，求める接線の方程式は，傾きを m とすると次のようになる。

$y-1=m(x-7)$　すなわち　$y=mx-(7m-1)$　……③

③ を円の方程式に代入して整理すると

$(m^2+1)x^2-2m(7m-1)x+\{(7m-1)^2-25\}=0$　……④

$m^2+1\neq 0$ であるから，2 次方程式 ④ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\{-m(7m-1)\}^2-(m^2+1)\{(7m-1)^2-25\}$$
$$=\{m^2-(m^2+1)\}(7m-1)^2+25(m^2+1)$$
$$=-24m^2+14m+24=-2(4m+3)(3m-4)$$

円と直線 ③ が接するための条件は　　$D=0$

よって　　$m=-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{3}$

$m=-\dfrac{3}{4}$ のとき，④ の重解は　　$x=\dfrac{m(7m-1)}{m^2+1}=3$

このとき　　$y=mx-(7m-1)=-\dfrac{3}{4}\cdot 3-\left(-\dfrac{25}{4}\right)=4$

同様に，$m=\dfrac{4}{3}$ のとき，④ の重解は　　$x=4$

このとき　　$y=-3$

したがって，求める接線の方程式と接点の座標は

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}，(3,\ 4)；y=\frac{4}{3}x-\frac{25}{3}，(4,\ -3)$$

別解 2　(別解 1 と 3 行目まで同じ)

③ から　　$mx-y-(7m-1)=0$　……⑤

円の中心 (0，0) と接線の距離が円の半径 5 に等しいから

$$\frac{|m\cdot 0-0-(7m-1)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=5$$

両辺に $\sqrt{m^2+1}$ を掛けて　　$|-7m+1|=5\sqrt{m^2+1}$

両辺を 2 乗して整理すると　　$12m^2-7m-12=0$

ゆえに　　　$(4m+3)(3m-4)=0$

これを解いて　　$m=-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{3}$

[1]　$m=-\dfrac{3}{4}$ のとき，⑤ は　　$3x+4y-25=0$　……⑥

直線 OP は $y=\dfrac{4}{3}x$ と表されるから，⑥ と連立させて解くと，接点の座標は

$(3,\ 4)$

[2]　$m=\dfrac{4}{3}$ のとき，⑤ は　　$4x-3y-25=0$　……⑦

直線 OP は $y=-\dfrac{3}{4}x$ と表されるから，⑦ と連立させて解くと，接点の座標は

$(4,\ -3)$

(2)　直線 $7x+y=0$ と垂直な直線の傾きは $\dfrac{1}{7}$ であるから，求める接線の方程式を

$x-7y+k=0$ とする。

円の中心 $(0,\ 0)$ と接線の距離が円の半径 $2\sqrt{2}$ に等しいから

$$\frac{|0-7\cdot 0+k|}{\sqrt{1^2+(-7)^2}}=2\sqrt{2}$$

よって　　$|k|=20$　すなわち　$k=\pm 20$

ゆえに，求める接線の方程式は　　$x-7y+20=0$，$x-7y-20=0$

別解　直線 $7x+y=0$ と垂直な直線の傾きは $\dfrac{1}{7}$ であるから，求める接線の方程式を

$y=\dfrac{1}{7}x+n$ ……① とする。

① を円の方程式 $x^2+y^2=8$ に代入して整理すると

$$50x^2+14nx+49(n^2-8)=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(7n)^2-50\cdot 49(n^2-8)=-49(49n^2-400)$$

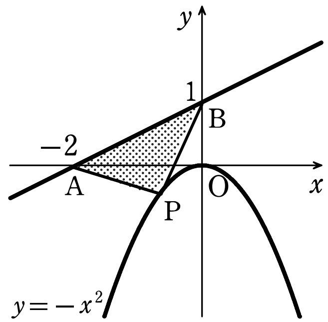
円と直線 ① が接するための条件は　　$D=0$

ゆえに　　$n^2=\dfrac{400}{49}$　　　　これを解いて　　$n=\pm\dfrac{20}{7}$

よって，求める接線の方程式は　　$y=\dfrac{1}{7}x+\dfrac{20}{7}$，$y=\dfrac{1}{7}x-\dfrac{20}{7}$

8

解説



点 P の座標を $(t,\ -t^2)$ とする。

直線 AB の方程式は　　$\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{1}=1$

すなわち　　$x-2y+2=0$

また　　$AB=\sqrt{(0+2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{5}$

点 P と直線 AB の距離を d とすると

$$d=\frac{|t-2\cdot(-t^2)+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}|2t^2+t+2|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left|2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}\right\}$$

よって，d は $t=-\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{15}{8}=\dfrac{3\sqrt{5}}{8}$ をとる。

このとき，△ABP の面積 S は最小で　　$S=\dfrac{1}{2}AB\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\dfrac{3\sqrt{5}}{8}=\dfrac{15}{16}$

$t=-\dfrac{1}{4}$ のとき，P の座標は　　$\left(-\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{16}\right)$

以上から，$P\left(-\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{16}\right)$ のとき最小値 $\dfrac{15}{16}$

9

解説

(1)　両辺の平方の差を考えると

$$(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{4a+b})^2=(4a+4\sqrt{ab}+b)-(4a+b)$$
$$=4\sqrt{ab}>0$$

よって　　$(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{4a+b})^2$

$2\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，$\sqrt{4a+b}>0$ であるから　　$2\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{4a+b}$

(2)　[1]　$|a|-|b|<0$ すなわち $|a|<|b|$ のとき

(左辺)<0，(右辺)>0 であるから不等式は成り立つ。

[2]　$|a|-|b|\geqq 0$ すなわち $|a|\geqq|b|$ のとき

$$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2=(a-b)^2-(a^2-2|ab|+b^2)$$
$$=2(-ab+|ab|)\geqq 0 \quad \cdots\cdots ②$$

よって　$(|a|-|b|)^2\leqq|a-b|^2$

$|a|-|b|\geqq 0$，$|a-b|\geqq 0$ であるから

$$|a|-|b|\leqq|a-b|$$

$\boxed{10}$

解説

(1)　$x^2-2xy+5y^2+2x+2y+2=x^2+2(1-y)x+5y^2+2y+2$

$$=\{x^2+2(1-y)x+(1-y)^2\}-(1-y)^2+5y^2+2y+2$$
$$=\{x+(1-y)\}^2+4y^2+4y+1$$
$$=(x-y+1)^2+(2y+1)^2\geqq 0$$

等号が成り立つのは，$x-y+1=0$ かつ $2y+1=0$ すなわち

$x=-\dfrac{3}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$ のときである。

(2)　(左辺)$=ab+4+1+\dfrac{4}{ab}=ab+\dfrac{4}{ab}+5$

$ab>0$，$\dfrac{4}{ab}>0$ であるから，(相加平均)$\geqq$(相乗平均) により

$$ab+\frac{4}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}=2\cdot 2=4$$

よって　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)=ab+\dfrac{4}{ab}+5\geqq 4+5=9$

等号が成り立つのは　$ab=\dfrac{4}{ab}$　すなわち　$ab=2$ のとき。

$\boxed{11}$

解説

$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_rx^r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$　$\cdots\cdots$① とする。

(1)　① の等式において，$x=-\dfrac{1}{2}$ を代入すると

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\left(-\frac{1}{2}\right)+{}_n\mathrm{C}_2\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

ゆえに　$${}_n\mathrm{C}_0-\frac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{{}_n\mathrm{C}_n}{2^n}=\frac{1}{2^n}$$

(2)　① の等式において，$x=1$ を代入すると

$$2^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n \quad \cdots\cdots ②$$

① の等式において，$x=-1$ を代入すると

$$0={}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots-{}_n\mathrm{C}_n \quad \cdots\cdots ③$$

②＋③ から　$2^n=2({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1})$

②－③ から　$2^n=2({}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n)$

したがって　${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^{n-1}$

(3)　① の等式において，$x=-1$ を代入すると

$$0={}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n \quad \cdots\cdots ④$$

よって，②＋④ から　$2^n=2({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n)$

②－④ から　$2^n=2({}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1})$

したがって　${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}=2^{n-1}$