【定期試験対策講習】

１学期
期末考査
対策教材①

中２甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｍ「三角比」後半

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

△ABC において，$a=\sqrt{2}$，$b=2$，$A=30°$ のとき，c，B，C を求めよ。

$\boxed{2}$

△ABC において，$\dfrac{\sin A}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sin B}{\sqrt{3}}=\sin C$ が成り立つとき

(1)　△ABC の内角のうち，最も大きい角の大きさを求めよ。

(2)　△ABC の内角のうち，2 番目に大きい角の正接を求めよ。

$\boxed{3}$

△ABC において，$\sin C=\cos B\sin A$ が成り立つとき，△ABC はどのような形をしているか。

$\boxed{4}$

(1)　1 辺の長さが 1 の正八角形の面積を求めよ。

(2)　△ABC において，AB=8，AC=5，∠A$=120°$ とする。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

$\boxed{5}$

円 O に内接する四角形 ABCD において，

AB=3，BC=1，CD=3，DA=4

とするとき，次のものを求めよ。

(1)　A　(2)　対角線 BD の長さ　(3)　四角形 ABCD の面積

(4)　円 O の半径　(5)　△ABDの内接円の半径

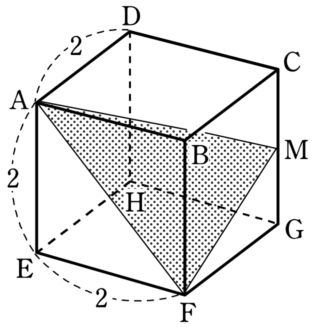
$\boxed{6}$

右の図の立方体 ABCD－EFGH において，辺 CG の中点を M とする。次のものを求めよ。

(1)　AF，AM，FM の長さ

(2)　∠FAM の大きさ

(3)　△AFM の面積



$\boxed{7}$

PA=PB=PC=3，AB=2，BC=3，CA$=\sqrt{7}$ である三角錐 PABC がある。頂点 P から底面 ABC へ下ろした垂線と底面 ABC との交点を H とする。次の値を求めよ。

(1)　AH の長さ　(2)　PH の長さ

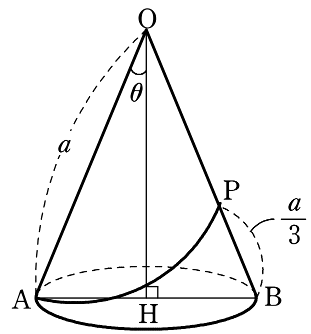
(3)　△ABC の面積　(4)　三角錐 PABC の体積

$\boxed{8}$

右の図の直円錐で，H は円の中心，線分 AB は直径，OH は円に垂直で，OA$=a$，$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ とする。

点 P が母線 OB 上にあり，PB$=\dfrac{a}{3}$ とするとき，

点 A からこの直円錐の側面を通って点 P に至る最短経路の長さを求めよ。



$\boxed{9}$

△ABC において，辺 BC を 1：2 に分ける点を D とする。$a=6$，$b=5$，$c=7$ のとき，AD の長さを求めよ。

【解答&解説】

$\boxed{1}$

解答　$c=\sqrt{3}+1$，$B=45°$，$C=105°$　または　$c=\sqrt{3}-1$，$B=135°$，$C=15°$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$150°$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

$\boxed{3}$

解答　$A=90°$ の直角三角形

$\boxed{4}$

解答　(1)　$2(1+\sqrt{2})$　　(2)　$\dfrac{40}{13}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$A=60°$　　(2)　$\mathrm{BD}=\sqrt{13}$　　(3)　$\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$　　(4)　$\dfrac{\sqrt{39}}{3}$　(5)　$\dfrac{7\sqrt{3}-\sqrt{39}}{6}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$\mathrm{AF}=2\sqrt{2}$，$\mathrm{AM}=3$，$\mathrm{FM}=\sqrt{5}$　　(2)　$45°$　　(3)　3

$\boxed{7}$

解答　(1)　$\dfrac{\sqrt{21}}{3}$　　(2)　$\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$　　(3)　$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　(4)　$\sqrt{5}$

$\boxed{8}$

解答　$\dfrac{\sqrt{7}}{3}a$

$\boxed{9}$

解答　$\mathrm{AD}=\sqrt{33}$

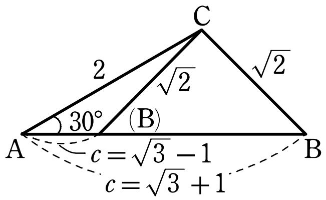
$\boxed{1}$

解説

余弦定理により　$(\sqrt{2})^2=2^2+c^2-2\cdot 2c\cos 30°$

よって　$c^2-2\sqrt{3}\,c+2=0$　　したがって　$c=\sqrt{3}\pm 1$

[1]　$c=\sqrt{3}+1$ のとき



$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ゆえに　$B=45°$

よって　$C=180°-(30°+45°)=105°$

[2]　$c=\sqrt{3}-1$ のとき

$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ゆえに　$B=135°$　　よって　$C=180°-(30°+135°)=15°$

以上から　$c=\sqrt{3}+1$，$B=45°$，$C=105°$

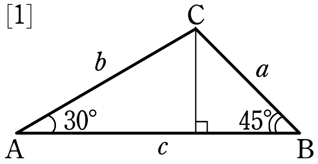
または　$c=\sqrt{3}-1$，$B=135°$，$C=15°$

別解　正弦定理から　$\dfrac{2}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30°}$　　ゆえに　$\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$A=30°$ より，$0°<B<150°$ であるから　$B=45°$，$135°$

[1]　$B=45°$ のとき

[1]



$C=180°-(30°+45°)=105°$

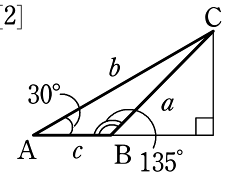
$c=b\cos A+a\cos B$

$=2\cos 30°+\sqrt{2}\cos 45°$

$=\sqrt{3}+1$

[2]　$B=135°$ のとき

[2]



$C=180°-(30°+135°)=15°$

$c=b\cos A+a\cos B$

$=2\cos 30°+\sqrt{2}\cos 135°$

$=\sqrt{3}-1$

$\boxed{2}$

解説

(1)　正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ から　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

条件から　$\sin A : \sin B : \sin C = \sqrt{7} : \sqrt{3} : 1$

よって　$a : b : c = \sqrt{7} : \sqrt{3} : 1$

ゆえに，$a=\sqrt{7}\,k$，$b=\sqrt{3}\,k$，$c=k$ $(k>0)$ とおける。

よって，a が最大の辺であるから，$\angle\mathrm{A}$ が最大の角である。

余弦定理により　$\cos A = \dfrac{(\sqrt{3}\,k)^2+k^2-(\sqrt{7}\,k)^2}{2\cdot\sqrt{3}\,k\cdot k} = \dfrac{-3k^2}{2\sqrt{3}\,k^2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，最大の角の大きさは　$A=150^\circ$

(2)　(1) から，2 番目に大きい角は　$\angle\mathrm{B}$

余弦定理により　$\cos B = \dfrac{k^2+(\sqrt{7}\,k)^2-(\sqrt{3}\,k)^2}{2\cdot k\cdot\sqrt{7}\,k} = \dfrac{5k^2}{2\sqrt{7}\,k^2} = \dfrac{5}{2\sqrt{7}}$

$1+\tan^2 B = \dfrac{1}{\cos^2 B}$ であるから

$$\tan^2 B = \frac{1}{\cos^2 B}-1 = \left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2-1 = \frac{28}{25}-1 = \frac{3}{25}$$

$A>90^\circ$ より $B<90^\circ$ であるから　$\tan B>0$

したがって　$\tan B = \sqrt{\dfrac{3}{25}} = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$

3

(解説)

$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径を R とする。

正弦定理により　$\sin C = \dfrac{c}{2R}$，$\sin A = \dfrac{a}{2R}$

余弦定理により　$\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

これらを等式 $\sin C = \cos B \sin A$ に代入すると

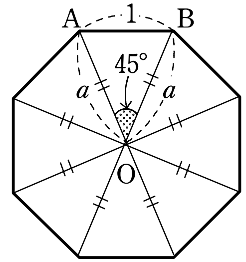
$$\frac{c}{2R} = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\frac{a}{2R}\qquad すなわち\qquad \frac{c}{2R} = \frac{c^2+a^2-b^2}{4cR}$$

両辺に $4cR$ を掛けて　$2c^2 = c^2+a^2-b^2$　　すなわち　$b^2+c^2=a^2$

よって，$\triangle\mathrm{ABC}$ は $A=90^\circ$ の直角三角形である。

4

(解説)



(1)　図のように，正八角形を 8 個の合同な三角形に分け，3 点 O，A，B をとると　$\angle\mathrm{AOB} = 360^\circ \div 8 = 45^\circ$

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=a$ とすると，余弦定理により

$$1^2 = a^2+a^2-2a\cdot a\cos 45^\circ$$

整理して　$(2-\sqrt{2})a^2=1$

ゆえに　$a^2 = \dfrac{1}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

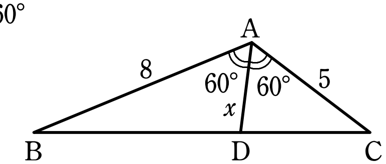
よって，求める面積は　$8\triangle\mathrm{OAB} = 8\cdot\dfrac{1}{2}a^2\sin 45^\circ = 2(1+\sqrt{2})$

(2)　$\mathrm{AD}=x$ とする。$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{ACD}$ であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot x\cdot\sin 60^\circ + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot x\cdot\sin 60^\circ$$

よって　$40 = 8x+5x$

これを解いて　$x = \mathrm{AD} = \dfrac{40}{13}$



5

(解説)

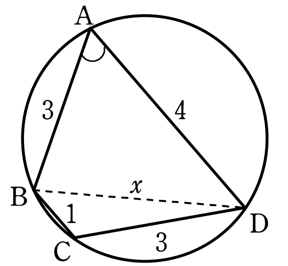
(1)　$\mathrm{BD}=x$ とする。$\triangle\mathrm{ABD}$ に余弦定理を適用して

$$x^2 = 3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cos A \quad \cdots\cdots ①$$

四角形 ABCD は円に内接するから　$C = 180^\circ - A$

$\triangle\mathrm{BCD}$ に余弦定理を適用して

$$x^2 = 1^2+3^2-2\cdot 1\cdot 3\cos(180^\circ-A)$$
$$= 1^2+3^2+2\cdot 1\cdot 3\cos A \quad \cdots\cdots ②$$



①，② から　$25-24\cos A = 10+6\cos A$

よって　$\cos A = \dfrac{1}{2}$　　したがって　$A=60^\circ$

(2)　① より　$x^2 = 9+16-24\cos 60^\circ = 13$

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{13}$　　よって　$\mathrm{BD}=\sqrt{13}$

(3)　$A=60^\circ$ より　$C=120^\circ$

四角形ABCDの面積をSとすると

$$S=\triangle ABD+\triangle BCD=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\sin 120^\circ$$

$$=\frac{12\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$$

(4) 円Oは△ABDの外接円である。求める半径をRとすると

正弦定理より，$\dfrac{\sqrt{13}}{\sin 60^\circ}=2R$ $\quad\therefore\quad R=\dfrac{\sqrt{13}}{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{39}}{3}$

(5) △ABDの内接円の半径をrとすると

$\triangle ABD=\dfrac{1}{2}r(AB+BD+DA)$

より $\dfrac{1}{2}\times 3\times 4\times\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times r\times(3+4+\sqrt{13})$

$$r=\frac{3\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{7+\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{3}(7-\sqrt{13})}{(7+\sqrt{13})(7-\sqrt{13})}=\frac{7\sqrt{3}-\sqrt{39}}{6}$$

6

解説

(1) 三平方の定理から $\quad AF=\sqrt{AE^2+EF^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

同様に $\quad AC=2\sqrt{2}$

よって $\quad AM=\sqrt{AC^2+CM^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{9}=3$

また $\quad FM=\sqrt{FG^2+MG^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

(2) △AFMにおいて，余弦定理により

$$\cos\angle FAM=\frac{AF^2+AM^2-FM^2}{2AF\cdot AM}=\frac{8+9-5}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $\quad \angle FAM=45^\circ$

(3) $\triangle AFM=\dfrac{1}{2}AF\cdot AM\sin\angle FAM=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\sin 45^\circ=3$

7

解説

PA＝PB＝PCであるから，Pから下ろした垂線と底面ABCとの交点Hは △ABCの外接円の中心である。

(1) $\angle ABC=\theta$とおく。

△ABCにおいて 余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{2^2+3^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{2}$$

ゆえに $\quad \sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって 正弦定理により

$$AH=\frac{\sqrt{7}}{2\sin\theta}=\frac{\sqrt{7}}{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$$

(2) $PH^2=PA^2-AH^2=3^2-\left(\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)^2=\dfrac{20}{3}$

$PH>0$であるから $\quad PH=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$

(3) (1)から $\quad \triangle ABC=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(4) 三角錐PABCの体積をVとすると $\quad V=\dfrac{1}{3}\times\triangle ABC\times PH$であるから

(2)，(3)より $\quad V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{15}}{3}=\sqrt{5}$

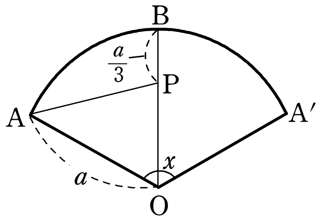
8

解説

$AB=2r$とすると，△OAHで，$AH=r$,

$\angle\mathrm{OHA}=90^\circ$，$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ であるから　　$\dfrac{r}{a}=\dfrac{1}{3}$

側面を直線 OA で切り開いた展開図は，図のような，
中心 O，半径 $\mathrm{OA}=a$ の扇形である。
中心角を x とすると，図の弧 ABA′ の長さについて



$$2\pi a\cdot\frac{x}{360^\circ}=2\pi r$$

$\dfrac{r}{a}=\dfrac{1}{3}$ であるから　　$x=360^\circ\cdot\dfrac{r}{a}=360^\circ\cdot\dfrac{1}{3}=120^\circ$

ここで，求める最短経路の長さは，図の線分 AP の長さであるから，△OAP において，
余弦定理により

$$\mathrm{AP}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OP}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}\cos 60^\circ=a^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2-2a\cdot\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{9}a^2$$

$\mathrm{AP}>0$ であるから，求める最短経路の長さは　　$\dfrac{\sqrt{7}}{3}a$

$\boxed{9}$

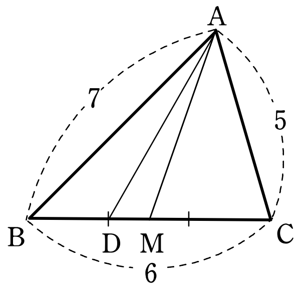
(解説)

△ABC において，余弦定理により

$$\cos B=\frac{7^2+6^2-5^2}{2\cdot7\cdot6}=\frac{5}{7}$$

また　$\mathrm{BD}=2$

△ABD において，余弦定理により



$$\mathrm{AD}^2=7^2+2^2-2\cdot7\cdot2\cdot\frac{5}{7}=33$$

$\mathrm{AD}>0$ であるから　　$\mathrm{AD}=\sqrt{33}$