【定期試験対策講習】

１学期
期末考査
対策教材②

高１甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｙ「微分法」の後半　＋　「積分法」の前半

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

関数 $y=4\sin^3 x+3\cos^2 x-2$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

$\boxed{2}$

$a>0$ とする。関数 $f(x)=x^3-3a^2x$ $(0\leqq x\leqq 1)$ について

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

$\boxed{3}$

関数 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値が 10 で，最小値が -6 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

$\boxed{4}$

2 次関数 $f(x)$ の 1 つの不定積分 $F(x)$ が $xf(x)-x^3+2x^2$ に等しく，$f(-1)=0$ である。このとき，$f(x)$ を求めよ。

$\boxed{5}$

次の定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)\,dx$　　(2)　$\displaystyle\int_{-3}^{1}(x^3+1)\,dx-\int_{-3}^{1}(x^3-x^2)\,dx$

(3)　$\displaystyle\int_{-3}^{1}(2t-1)(t-1)\,dt+\int_{0}^{1}(2t-1)(1-t)\,dt$

(4)　$\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^4-5x^3+x^2+9x)\,dx$　　(5)　$\displaystyle\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}}(x^2-4x+2)\,dx$

$\boxed{6}$

$f(x)=x^2+ax+b$ とする。任意の 1 次式 $g(x)$ に対して，常に $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx=0$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$\boxed{7}$

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1)　$\displaystyle f(x)=6x^2-x+\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$　　(2)　$\displaystyle f(x)=\int_{0}^{1}xf(t)\,dt+\int_{0}^{1}tf(t)\,dt+1$

$\boxed{8}$

(1)　等式 $\displaystyle\int_{a}^{x}f(t)\,dt=x^3-3x^2+x+a$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(2)　関数 $\displaystyle f(x)=\int_{1}^{x}(t^2-t-2)\,dt$ の極値を求めよ。

$\boxed{9}$

2 直線 $\ell : 3-x=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+5}{2}$，$m : x-2=\dfrac{y}{2}=z+1$ がある。ℓ 上に点 P，m 上に点 Q をとるとき，線分 PQ の最小値を求めよ。また，そのときの P，Q の座標を求めよ。

$\boxed{10}$

A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 3,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 3)$ の定める平面 ABC に原点 O から下ろした垂線を OH とするとき，点 H の座標を求めよ。

【解答&解説】

1

解答 $x=\frac{\pi}{2}$ で最大値 2，$x=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$ で最小値 $\frac{3}{4}$

2

解答 (1) $0<a<1$ のとき　$x=a$ で最小値 $-2a^3$，
$1\leqq a$ のとき　$x=1$ で最小値 $1-3a^2$

(2) $0<a<\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき　$x=1$ で最大値 $1-3a^2$，
$a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき　$x=0$，1 で最大値 0，
$\frac{1}{\sqrt{3}}<a$ のとき　$x=0$ で最大値 0

3

解答 $a=1$，$b=10$

4

解答 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-4x-\frac{11}{2}$

5

解答 (1) $-\frac{9}{2}$　(2) $\frac{40}{3}$　(3) $\frac{69}{2}$　(4) $\frac{272}{15}$　(5) $-\frac{8\sqrt{2}}{3}$

6

解答 $a=0$，$b=-\frac{1}{3}$

7

解答 (1) $f(x)=6x^2-x-4$　(2) $f(x)=-12x-6$

8

解答 (1) $f(x)=3x^2-6x+1$，$a=0$，1，2
(2) $x=-1$ で極大値 $\frac{10}{3}$，$x=2$ で極小値 $-\frac{7}{6}$

9

解答 点 P，Q の座標がそれぞれ $(2,\ 7,\ -3)$，$(4,\ 4,\ 1)$ のとき，最小値 $\sqrt{29}$

10

解答 $\left(\frac{18}{17},\ \frac{12}{17},\ \frac{12}{17}\right)$

1

解説

$$y=4\sin^3 x+3(1-\sin^2 x)-2=4\sin^3 x-3\sin^2 x+1$$

$\sin x=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq\pi$ から　$0\leqq t\leqq 1$

また　$y=4t^3-3t^2+1$

$$\frac{dy}{dt}=12t^2-6t=6t(2t-1)$$

$\frac{dy}{dt}=0$ とすると　$t=0,\ \frac{1}{2}$

$0\leqq t\leqq 1$ における y の増減表は，右のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$\frac{dy}{dt}$	0	$-$	0	$+$	
y	1	↘	$\frac{3}{4}$	↗	2

よって，y は　$t=1$ すなわち $x=\frac{\pi}{2}$ で最大値 2，

$t=\frac{1}{2}$ すなわち $x=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$ で最小値 $\frac{3}{4}$　をとる。

2

解説

$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\pm a$

また　$f(0)=0$，　$f(1)=1-3a^2$，　$f(a)=-2a^3$

(1) [1] $0<a<1$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は，右のようになる。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-2a^3$	↗	$1-3a^2$

よって，$f(x)$ は $x=a$ で最小値 $-2a^3$ をとる。

[2] $1\leqq a$ のとき

$0 \leqq x \leqq 1$ において，$f'(x)=3(x+a)(x-a) \leqq 0$ であるから，$f(x)$ は単調に減少する。

よって，$f(x)$ は　$x=1$ で最小値 $1-3a^2$　をとる。

(2)　$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は，右のようになる。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$

よって，$0 \leqq x \leqq 1$ において，最大値は $f(0)$ または $f(1)$ である。

$$f(0)-f(1)=0-(1-3a^2)$$
$$=3a^2-1=3\left(a+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(a-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

[1]　$0<a<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき　　$f(0)<f(1)$

よって，$f(x)$ は　$x=1$ で最大値 $1-3a^2$　をとる。

[2]　$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき　　$f(0)=f(1)$

よって，$f(x)$ は　$x=0,\ 1$ で最大値 0　をとる。

[3]　$\dfrac{1}{\sqrt{3}}<a$ のとき　　$f(0)>f(1)$

よって，$f(x)$ は　$x=0$ で最大値 0　をとる。

3

解説

$f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ 4$

$a>0$ であるから，$-1 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の増減表は，右のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-7a+b$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$-16a+b$

よって，最大値は　　$f(0)=b$

また，$a>0$ から　　$-7a+b>-16a+b$

よって，最小値は　　$f(2)=-16a+b$

最大値が 10，最小値が -6 であるとき　　$b=10,\ -16a+b=-6$

これを解いて　　$a=1$，$b=10$　（これは $a>0$ を満たす）

4

解説

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと

$$F(x)=\int(ax^2+bx+c)dx=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$F(x)=xf(x)-x^3+2x^2$ であるから

$$\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C=x(ax^2+bx+c)-x^3+2x^2$$

よって　　$\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2+cx+C=(a-1)x^3+(b+2)x^2+cx$

これが x についての恒等式であるから　　$\dfrac{a}{3}=a-1,$　$\dfrac{b}{2}=b+2,$　$C=0$

ゆえに　　$a=\dfrac{3}{2},\ b=-4$　　　このとき　　$f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-4x+c$

条件 $f(-1)=0$ から　　$\dfrac{3}{2}+4+c=0$　　　よって　　$c=-\dfrac{11}{2}$

したがって　　$f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-4x-\dfrac{11}{2}$

参考　上の解答では $F(x)=\int f(x)\,dx$ の関係を利用したが，次のように $F'(x)=f(x)$ の関係を利用して解いてもよい。

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと

$$F(x)=xf(x)-x^3+2x^2=x(ax^2+bx+c)-x^3+2x^2$$
$$=(a-1)x^3+(b+2)x^2+cx$$

よって　　$F'(x)=3(a-1)x^2+2(b+2)x+c$

$F'(x)=f(x)$ であるから　　$3(a-1)x^2+2(b+2)x+c=ax^2+bx+c$

これが x についての恒等式であるから

$3(a-1)=a,$　$2(b+2)=b$　　　ゆえに　$a=\dfrac{3}{2},\ b=-4$

以下，上の解答と同様にして c を求める。

5

解説

(1) $\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx=-\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3=-\frac{9}{2}$

(2) $\int_{-3}^{1}(x^3+1)dx-\int_{-3}^{1}(x^3-x^2)dx=\int_{-3}^{1}(x^2+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-3}^{1}$

$$=\left(\frac{1}{3}+1\right)-(-9-3)=\frac{40}{3}$$

(3) $\int_{-3}^{1}(2t-1)(t-1)dt+\int_{0}^{1}(2t-1)(1-t)dt$

$=\int_{-3}^{1}(2t-1)(t-1)dt+\int_{1}^{0}(2t-1)(t-1)dt$

$=\int_{-3}^{0}(2t-1)(t-1)dt=\int_{-3}^{0}(2t^2-3t+1)dt$

$=\left[\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+t\right]_{-3}^{0}=0-\left(-18-\frac{27}{2}-3\right)=\frac{69}{2}$

(4) (与式)$=2\int_{0}^{2}(x^4+x^2)dx=2\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}=2\left\{\left(\frac{32}{5}+\frac{8}{3}\right)-0\right\}=\frac{272}{15}$

参考　n が 0 以上の整数のとき

$$\int_{-a}^{a}x^{2n+1}dx=0,\quad \int_{-a}^{a}x^{2n}dx=2\int_{0}^{a}x^{2n}dx$$

(5) $x^2-4x+2=0$ の解は　$x=2\pm\sqrt{2}$

よって　(与式)$=\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}}\{x-(2-\sqrt{2})\}\{x-(2+\sqrt{2})\}dx$

$$=-\frac{1}{6}\{(2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})\}^3=-\frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3=-\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

6

解説

p，q を定数として，$g(x)=px+q$ ($p\neq 0$) とおくと

$\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=p\int_{-1}^{1}(x^3+ax^2+bx)dx+q\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)dx$ ……①

$=2p\int_{0}^{1}ax^2dx+2q\int_{0}^{1}(x^2+b)dx=2p\left[\frac{a}{3}x^3\right]_{0}^{1}+2q\left[\frac{x^3}{3}+bx\right]_{0}^{1}$

$=\frac{2}{3}ap+\frac{2}{3}(1+3b)q$

$g(x)$ は任意の 1 次式であるから，任意の p，q ($p\neq 0$) に対して，上の式が 0 になる。したがって，p，q の係数が，それぞれ 0 である。

すなわち　$\frac{2}{3}a=0$，$\frac{2}{3}(1+3b)=0$　よって　$a=0$，$b=-\frac{1}{3}$

参考　①$=0$ から　$\int_{-1}^{1}(x^3+ax^2+bx)dx=\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)dx=0$

7

解説

(1) $\int_{-1}^{1}f(t)dt=a$ とおくと　$f(x)=6x^2-x+a$

ゆえに　$\int_{-1}^{1}f(t)dt=\int_{-1}^{1}(6t^2-t+a)dt=2\int_{0}^{1}(6t^2+a)dt$

$=2\left[2t^3+at\right]_{0}^{1}=2(2+a)$

よって　$a=2(2+a)$　ゆえに　$a=-4$

したがって　$f(x)=6x^2-x-4$

(2) x は積分変数 t に無関係であるから　$\int_{0}^{1}xf(t)dt=x\int_{0}^{1}f(t)dt$

$\int_{0}^{1}f(t)dt=a$，$\int_{0}^{1}tf(t)dt=b$ とおくと　$f(x)=ax+b+1$

ゆえに　$\int_{0}^{1}f(t)dt=\int_{0}^{1}(at+b+1)dt=\left[\frac{a}{2}t^2+(b+1)t\right]_{0}^{1}=\frac{a}{2}+b+1$

$\int_{0}^{1}tf(t)dt=\int_{0}^{1}t(at+b+1)dt=\int_{0}^{1}\{at^2+(b+1)t\}dt$

$=\left[\frac{a}{3}t^3+\frac{b+1}{2}t^2\right]_{0}^{1}=\frac{a}{3}+\frac{b+1}{2}$

よって　$\frac{a}{2}+b+1=a$，$\frac{a}{3}+\frac{b+1}{2}=b$

ゆえに　$a-2b=2$，$2a-3b=-3$

これを解いて　$a=-12,\ b=-7$

したがって　$f(x)=-12x-6$

$\boxed{8}$

(解説)

(1)　等式の両辺を x で微分すると　$f(x)=3x^2-6x+1$

また，等式で $x=a$ とおくと　$0=a^3-3a^2+a+a$

よって　$a^3-3a^2+2a=0$　すなわち　$a(a-1)(a-2)=0$

したがって　$a=0,\ 1,\ 2$

(2)　$f'(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x(t^2-t-2)dt=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 2$

また　$f(x)=\left[\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{t^2}{2}-2t\right]_1^x=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x+\dfrac{13}{6}$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

よって，$f(x)$ は

$x=-1$ で極大値 $\dfrac{10}{3}$，

$x=2$　で極小値 $-\dfrac{7}{6}$　をとる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $\dfrac{10}{3}$	↘	極小 $-\dfrac{7}{6}$	↗

$\boxed{9}$

(解説)

$3-x=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+5}{2}=s$　とおくと

$x=-s+3,\ y=2s+5,\ z=2s-5$

$x-2=\dfrac{y}{2}=z+1=t$　とおくと

$x=t+2,\ y=2t,\ z=t-1$

$\mathrm{P}(-s+3,\ 2s+5,\ 2s-5)$，$\mathrm{Q}(t+2,\ 2t,\ t-1)$ とおける。

$\mathrm{PQ}^2=\{(t+2)-(-s+3)\}^2+\{2t-(2s+5)\}^2+\{(t-1)-(2s-5)\}^2$

$=9s^2+(-10t+2)s+(6t^2-14t+42)$

$=9\left(s-\dfrac{5t-1}{9}\right)^2-\dfrac{(5t-1)^2}{9}+6t^2-14t+42$

$=9\left(s-\dfrac{5t-1}{9}\right)^2+\dfrac{29}{9}(t-2)^2+29$

よって，PQ^2 の最小値は 29 である。

このとき，PQ も最小となり，最小値は　$\sqrt{29}$

PQ が最小となるのは　$s=\dfrac{5t-1}{9}$，$t=2$　のときである。

すなわち　$s=1,\ t=2$

よって，PQ が最小となるときの P，Q の座標はそれぞれ

$(2,\ 7,\ -3)$，$(4,\ 4,\ 1)$

$\boxed{10}$

(解説)

H が平面 ABC 上にあるから

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，　$s+t+u=1$ …… ①

(s，t，u は実数) と表される。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s(2,\ 0,\ 0)+t(0,\ 3,\ 0)+u(0,\ 0,\ 3)$

$=(2s,\ 3t,\ 3u)$　…… ②

$\mathrm{OH}\perp$(平面 ABC) であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直である。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$　…… ③，　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$　…… ④

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 3,\ 0)$ であるから，③ より　$2s\times(-2)+3t\times3+3u\times0=0$

ゆえに　$-4s+9t=0$　…… ⑤

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 0,\ 3)$ であるから，④ より　$2s\times(-2)+3t\times0+3u\times3=0$

ゆえに　$-4s+9u=0$　…… ⑥

⑤，⑥ から　$t=\dfrac{4}{9}s$，$u=\dfrac{4}{9}s$　…… ⑦

⑦ を ① に代入して　$s+\dfrac{4}{9}s+\dfrac{4}{9}s=1$　これを解いて　$s=\dfrac{9}{17}$

このとき，⑦ から　$t=\dfrac{4}{17}$，$u=\dfrac{4}{17}$

s，t，u の値を ② に代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{18}{17},\ \dfrac{12}{17},\ \dfrac{12}{17}\right)$

したがって，点 H の座標は　$\left(\dfrac{18}{17},\ \dfrac{12}{17},\ \dfrac{12}{17}\right)$