【定期試験対策講習】

１学期
期末考査
対策教材②

中２甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｋ「確率」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

1 個のさいころを 3 回投げるとき，次のような目が出る確率を求めよ。

(1)　3 回とも異なる目が出る　　　(2)　目の積が 140 より大きい

$\boxed{2}$

A，B，C，D，E，F，G の 7 文字を 1 列に並べるとき，A が B より左側にあり，B が C より左側にある確率を求めよ。

$\boxed{3}$

5 人がじゃんけんを 1 回するとき，次の確率を求めよ。

(1)　1 人だけが勝つ確率　　(2)　3 人が勝つ確率　　(3)　あいこになる確率

$\boxed{4}$

1 個のさいころを 4 回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　出る目がすべて 3 以上である確率　　(2)　出る目の最小値が 3 である確率

(3)　出る目の最大値が 3 である確率

$\boxed{5}$

10 本のくじの中に当たりが 2 本ある。引いたくじをもとに戻さないで，A，B，C の 3 人がこの順に 1 本ずつ引くとき，次の確率を求めよ。

(1)　A，B がはずれて，C だけが当たる確率

(2)　C が当たる確率

$\boxed{6}$

x 軸上を動く点 A があり，最初は原点にある。硬貨を投げて表が出たら正の方向に 1 だけ進み，裏が出たら負の方向に 1 だけ進む。硬貨を 6 回投げるものとして，次の確率を求めよ。

(1)　点 A が原点に戻る確率

(2)　点 A が 2 回目に原点に戻り，かつ 6 回目に原点に戻る確率

$\boxed{7}$

赤玉 1 個と白玉 2 個と青玉 3 個が入った袋から 1 個の玉を取り出し，色を調べてからもとに戻すことを 5 回行う。このとき，赤玉が 1 回，白玉が 2 回，青玉が 2 回出る確率を求めよ。

$\boxed{8}$

4 回に 1 回の割合で帽子を忘れるくせのある K 君が，正月に A，B，C 3 軒を順に年始回りをして家に帰ったところ，この 3 軒のいずれかに帽子を忘れてきたことに気がついた。2 番目の家 B に忘れてきた確率を求めよ。

$\boxed{9}$

白玉 5 個，赤玉 2 個が入った袋から，もとに戻さないで 1 個ずつ続けて 2 回玉を取り出す。2 回目の玉が赤玉であるとき，1 回目の玉も赤玉である確率を求めよ。

$\boxed{10}$

袋の中に赤球 3 個，白球 2 個，黒球 1 個が入っている。この袋から 2 個の球を同時に取り出す。赤球 1 個につき 1 点，白球 1 個につき 2 点，黒球 1 個につき 3 点もらえる。このとき，もらえる合計点の期待値を求めよ。

$\boxed{11}$

(1)　1 年生 2 人，2 年生 2 人，3 年生 2 人の 6 人の生徒がでたらめに 1 列に並ぶとき，同じ学年の生徒は全学年とも隣り合う確率を求めよ。

(2)　3 人の女子と 10 人の男子が円卓に座るとき，男子が連続して 5 人以上並ばない確率を求めよ。

$\boxed{12}$

0，1，2，3，4 から異なる 3 個の数字を用いて 3 桁の整数 xyz を作る。このとき，次の確率を求めよ。

(1)　xyz が 3 の倍数である確率　　　　(2)　$y > z$ である確率

$\boxed{13}$

xy 平面上の点 P は原点から出発して，次の規則で動くものとする。

さいころを振って，偶数の目が出れば，x 軸の正の方向に 1 だけ動き，
奇数の目が出れば，y 軸の正の方向に 1 だけ動く。

さいころを 6 回振るとき，次の確率を求めよ。

(1)　P が点 (3，3) にくる確率

(2)　P が点 (1，2) または点 (2，3) を通る確率

$\boxed{14}$

1 から 6 までの目が等しい確率で出るさいころを 4 回投げる試行を考える。

(1)　出る目の最小値が 1 である確率を求めよ。

(2)　出る目の最小値が 1 で，かつ最大値が 6 である確率を求めよ。

$\boxed{15}$

箱 A には白玉 4 個と赤玉 5 個，箱 B には白玉 3 個と赤玉 2 個と青玉 7 個が入っている。まず，任意に 1 つの箱を選び，次にその箱の中から玉を 1 個取り出すものとする。取り出された玉の色が白であったとき，それが箱 B から取り出された確率を求めよ。

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答 (1) $\dfrac{5}{9}$ (2) $\dfrac{5}{108}$

$\boxed{2}$

解答 $\dfrac{1}{6}$

$\boxed{3}$

解答 (1) $\dfrac{5}{81}$ (2) $\dfrac{10}{81}$ (3) $\dfrac{17}{27}$

$\boxed{4}$

解答 (1) $\dfrac{16}{81}$ (2) $\dfrac{175}{1296}$ (3) $\dfrac{65}{1296}$

$\boxed{5}$

解答 (1) $\dfrac{7}{45}$ (2) $\dfrac{1}{5}$

$\boxed{6}$

解答 (1) $\dfrac{5}{16}$ (2) $\dfrac{3}{16}$

$\boxed{7}$

解答 $\dfrac{5}{36}$

$\boxed{8}$

解答 $\dfrac{12}{37}$

$\boxed{9}$

解答 $\dfrac{1}{6}$

$\boxed{10}$

解答 $\dfrac{10}{3}$

$\boxed{11}$

解答 (1) $\dfrac{1}{15}$ (2) $\dfrac{1}{11}$

$\boxed{12}$

解答 (1) $\dfrac{5}{12}$ (2) $\dfrac{1}{2}$

$\boxed{13}$

解答 (1) $\dfrac{5}{16}$ (2) $\dfrac{1}{2}$

$\boxed{14}$

解答 (1) $\dfrac{671}{1296}$ (2) $\dfrac{151}{648}$

$\boxed{15}$

解答 $\dfrac{9}{25}$

$\boxed{1}$

解説

さいころを 3 回投げるとき，目の出方は　6^3 通り

(1)　3 回とも異なる目が出る場合は　${}_6\mathrm{P}_3$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_6\mathrm{P}_3}{6^3}=\dfrac{5}{9}$

(2)　積が 140 より大きくなる 3 つの目の組合せは

$(4,\ 6,\ 6)$，$(5,\ 5,\ 6)$，$(5,\ 6,\ 6)$，$(6,\ 6,\ 6)$

であり，目の出方はこの各組の順列であるから　$\dfrac{3!}{2!}\times 3+1=10$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{10}{6^3}=\dfrac{5}{108}$

$\boxed{2}$

解説

7 文字を 1 列に並べる方法は　$7!$ 通り

A が B より左側にあり，B が C より左側にある並べ方は，A，B，C を同じ文字○とみなし，○ 3 個と残りの 4 文字の順列を作り，○に左から A，B，C を順に入れるとできる。

この並べ方の総数は　$\dfrac{7!}{3!}$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{7!}{3!} \div 7! = \dfrac{1}{3!} = \dfrac{1}{6}$

3

（解説）

5 人の手の出し方の総数は　3^5 通り

(1)　1 人だけが勝つ場合，勝者の決まり方は　5 通り

そのおのおのに対して，勝ち方がグー，チョキ，パーの 3 通りある。

よって，求める確率は　$\dfrac{5 \times 3}{3^5} = \dfrac{5}{81}$

(2)　3 人が勝つ場合，勝者の決まり方は　${}_5C_3$ 通り

そのおのおのに対して，勝ち方がグー，チョキ，パーの 3 通りある。

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_5C_3 \times 3}{3^5} = \dfrac{10 \times 3}{3^5} = \dfrac{10}{81}$

(3)　あいこになるのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。

[1]　5 人とも同じ手を出す場合　3 通り

[2]　出る手が 3 種類の場合

手の組合せは

①　{グー，グー，グー，チョキ，パー}

②　{グー，チョキ，チョキ，チョキ，パー}

③　{グー，チョキ，パー，パー，パー}

④　{グー，グー，チョキ，チョキ，パー}

⑤　{グー，グー，チョキ，パー，パー}

⑥　{グー，チョキ，チョキ，パー，パー}

の 6 つの場合がある。出す人を区別すると

①～③ は，それぞれ　$\dfrac{5!}{3!} = 20$（通り）

④～⑥ は，それぞれ　$\dfrac{5!}{2!2!} = 30$（通り）

であるから，全部で　$20 \times 3 + 30 \times 3 = 150$（通り）

[1]，[2] から，あいこになる確率は　$\dfrac{3+150}{3^5} = \dfrac{153}{3^5} = \dfrac{17}{27}$

4

（解説）

(1)　さいころを 1 回投げるとき，出る目が 3 以上である確率は $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ であるから，求める確率は　${}_4C_4\left(\dfrac{2}{3}\right)^4\left(\dfrac{1}{3}\right)^0 = \dfrac{16}{81}$

(2)　出る目の最小値が 3 であるという事象は，出る目がすべて 3 以上であるという事象から，出る目がすべて 4 以上であるという事象を除いたものと考えられる。

さいころを 1 回投げるとき，出る目が 4 以上である確率は　$\dfrac{3}{6}$

したがって，求める確率は

$$\frac{16}{81} - {}_4C_4\left(\frac{3}{6}\right)^4\left(\frac{3}{6}\right)^0 = \left(\frac{4}{6}\right)^4 - \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{4^4-3^4}{6^4} = \frac{175}{1296}$$

(3)　出る目の最大値が 3 であるという事象は，出る目がすべて 3 以下であるという事象から，出る目がすべて 2 以下であるという事象を除いたものと考えられる。

さいころを 1 回投げるとき，出る目が 3 以下である確率は $\dfrac{3}{6}$，2 以下である確率は $\dfrac{2}{6}$

であるから，求める確率は　$\left(\dfrac{3}{6}\right)^4 - \left(\dfrac{2}{6}\right)^4 = \dfrac{3^4-2^4}{6^4} = \dfrac{65}{1296}$

5

（解説）

(1)　A がはずれる確率は　$\dfrac{8}{10}$

A がはずれたとき，B がはずれる確率は　$\dfrac{7}{9}$

A，B がはずれたとき，C が当たる確率は　$\dfrac{2}{8}$

よって，求める確率は　$\dfrac{8}{10}\times\dfrac{7}{9}\times\dfrac{2}{8}=\dfrac{7}{45}$

(2)　C が当たるのは，

[1]　A が当たり，B がはずれて，C が当たる

[2]　A がはずれて，B，C が当たる

[3]　A，B がはずれて，C が当たる

の 3 つの場合があり，これらの事象は互いに排反である。

[1] の確率は　$\dfrac{2}{10}\times\dfrac{8}{9}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{45}$

[2] の確率は　$\dfrac{8}{10}\times\dfrac{2}{9}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{45}$

[3] の確率は，(1) から　$\dfrac{7}{45}$

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{45}+\dfrac{1}{45}+\dfrac{7}{45}=\dfrac{9}{45}=\dfrac{1}{5}$

参考　A，B，C が当たる確率は，どれも $\dfrac{1}{5}$ で同じになる。

一般に，くじが n 本，当たりくじが a 本，引く人が n 人以下なら，当たる確率は全員同じで $\dfrac{a}{n}$ になる。

6

解説

(1)　硬貨を 6 回投げたとき，表が r 回出たとすると，点 A の x 座標は

$$1\cdot r+(-1)\cdot(6-r)=2r-6\quad(r=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 6)$$

x 座標が 0 のとき，$2r-6=0$ とすると　$r=3$

よって，求める確率は，6 回 のうち表が 3 回，裏が 3 回出る確率であるから

$$_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{20}{2^6}=\frac{5}{16}$$

(2)　最初の 2 回で表が 1 回，裏が 1 回出て，残りの 4 回で表が 2 回，裏が 2 回出る場合であるから，その確率は

$$_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\times{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2\cdot6}{2^6}=\frac{3}{16}$$

7

解説

各回の試行で，赤玉，白玉，青玉が出る確率は，それぞれ $\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{2}$ である。

また，5 回の試行で，赤玉が 1 回，白玉が 2 回，青玉が 2 回出る場合は $\dfrac{5!}{1!2!2!}$ 通りあり，これらは互いに排反である。

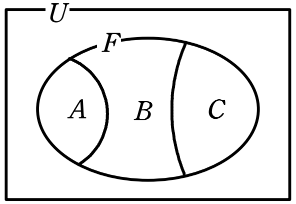
よって，求める確率は　$\dfrac{5!}{1!2!2!}\cdot\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{36}$

8

解説

A，B，C のどこかに忘れるという事象を F，B に忘れるという事象を B とする。

$\overline{F}$ は A，B，C のどこにも忘れないという事象であるから



(U は全事象)

$$P(F)=1-P(\overline{F})=1-\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{37}{64}$$

B は F に含まれるから　$P(F\cap B)=P(B)$

B に忘れるとき，1 軒前の A では忘れなかったことになるから

$$P(B)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}\qquad すなわち\qquad P(F\cap B)=\frac{3}{16}$$

よって，求める確率は

$$P_F(B)=\frac{P(F\cap B)}{P(F)}=\frac{3}{16}\div\frac{37}{64}=\frac{3}{16}\times\frac{64}{37}=\frac{12}{37}$$

9

解説

2 回目の玉が赤玉であるという事象を A，1 回目の玉が赤玉であるという事象を B とすると，求める確率は $P_A(B)$ である。

2 回目の玉が赤玉であるような出方は，赤赤，白赤の場合があり，これらは互いに排反であるから　$P(A)=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{7}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{2}{7}$

また　　　$P(A\cap B)=\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{21}$

したがって，求める確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{21}\div\frac{2}{7}=\frac{1}{21}\times\frac{7}{2}=\frac{1}{6}$$

$\boxed{10}$

(解説)

合計点を X 点とすると，X のとりうる値は

$X=2,\ 3,\ 4,\ 5$

それぞれの値をとる確率は

$X=2$ のとき　$\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{3}{15}$　　　$X=3$ のとき　$\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{6}{15}$

$X=4$ のとき　$\frac{{}_2C_2+{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_6C_2}=\frac{4}{15}$　　　$X=5$ のとき　$\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_6C_2}=\frac{2}{15}$

よって，求める期待値は　　$2\times\frac{3}{15}+3\times\frac{6}{15}+4\times\frac{4}{15}+5\times\frac{2}{15}=\frac{50}{15}=\frac{10}{3}$

$\boxed{11}$

(解説)

(1)　6 人を 1 列に並べる方法は全部で　${}_6P_6$ 通り

このうち，同じ学年の生徒が全学年とも隣り合う場合は

同じ学年の生徒 2 人を 1 組と考えると，3 組の並び方は　${}_3P_3$ 通り

そのおのおのに対して，3 組の生徒の並び方は　2^3 通り

であるから　　　${}_3P_3\times2^3$ 通り

よって，求める確率は　　$\frac{{}_3P_3\times2^3}{{}_6P_6}=\frac{2^3}{6\cdot5\cdot4}=\frac{1}{15}$

(2)　13 人の座り方は　$(13-1)!$ 通り

女子の座り方は　$(3-1)!$ 通り

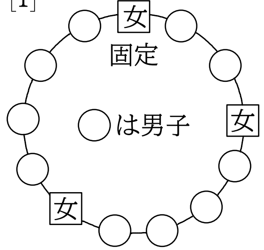
男子が 5 人以上連続して座らないのは，女子と女子の間の 3 か所に

[1]　4 人，4 人，2 人

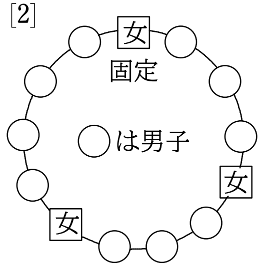
[2]　4 人，3 人，3 人

男子が座る場合である。

[1]



[2]



[1] の場合

男子が並んで座る座席を女子と女子の間の 3 か所に分ける方法は

$\frac{3!}{2!}=3$ (通り)

男子の座り方は ${}_{10}P_{10}$ 通りであるから，このときの場合の数は　$3\times{}_{10}P_{10}$ 通り

[2] の場合　[1] と同様にして　$3\times{}_{10}P_{10}$ 通り

したがって，求める確率は　　$\frac{(3-1)!\times3\times{}_{10}P_{10}\times2}{(13-1)!}=\frac{1}{11}$

$\boxed{12}$

(解説)

百の位は 0 以外の数であるから，3 桁の整数 xyz の総数は

$4\times{}_4P_2=48$ (個)

(1)　xyz が 3 の倍数である条件は，$x+y+z$ が 3 の倍数となることである。

この条件を満たす x，y，z の組と，xyz の個数は

$\{0,\ 1,\ 2\}$，$\{0,\ 2,\ 4\}$ のとき　　各 $2\times{}_2P_2=4$ (個)

$\{1,\ 2,\ 3\}$，$\{2,\ 3,\ 4\}$ のとき　　各 ${}_3P_3=3!=6$ (個)

ゆえに，xyz が 3 の倍数である整数は　　$4\times2+6\times2=20$ (個)

よって，求める確率は　　$\frac{20}{48}=\frac{5}{12}$

(2)　使う数字が異なるから，$y\neq z$ であり，$y>z$ である整数と $y<z$ である整数は同じ個数ずつ，すなわち $48\div2=24$ (個) ずつある。

よって，求める確率は　　$\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$

13

（解説）

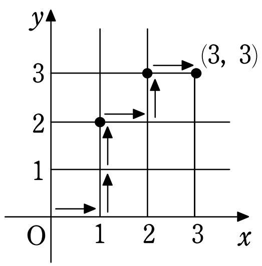
さいころを 1 回振るとき，偶数，奇数の目は 3 通りずつあるから，x 軸，y 軸の正の方向に 1 だけ動くことは同様に確からしい。また，さいころを 6 回振ると

P が動く経路は全部で　$2^6=64$（通り）

(1)　x 軸，y 軸の正の方向に 1 だけ動くことを，それぞれ →，↑ で表す。

点 (3，3) にくる経路は，→ 3 個，↑ 3 個の順列の総数で　${}_6C_3$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_6C_3}{64}=\dfrac{20}{64}=\dfrac{5}{16}$



(2)　点 (1，2) を通る確率は　$\dfrac{{}_3C_1\times 2^3}{64}=\dfrac{3\times 8}{64}=\dfrac{3}{8}$

点 (2，3) を通る確率は　$\dfrac{{}_5C_2\times 2}{64}=\dfrac{10\times 2}{64}=\dfrac{5}{16}$

点 (1，2) と点 (2，3) をともに通る確率は

$$\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1\times 2}{64}=\frac{3\times 2\times 2}{64}=\frac{3}{16}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{16}-\dfrac{3}{16}=\dfrac{1}{2}$

14

（解説）

(1)　出る目の最小値が 1 であるとは，少なくとも 1 回は 1 の目が出るということである。

これは 4 回とも 1 の目が出ないという事象を A とすると，A の余事象 $\overline{A}$ である。

よって，求める確率は

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{5^4}{6^4}=1-\frac{625}{1296}=\frac{671}{1296}$$

(2)　出る目の最小値が 1 で，かつ最大値が 6 であるとは，少なくとも 1 回は 1 の目が出て，かつ少なくとも 1 回は 6 の目が出るということである。よって，4 回とも 6 の目が出ない事象を B とすると，この事象は (1) の A も用いて $\overline{A}\cap\overline{B}$ で表される。

よって，求める確率は

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}$$

$$=1-\left(\frac{5^4}{6^4}+\frac{5^4}{6^4}-\frac{4^4}{6^4}\right)$$

$$=1-\frac{625+625-256}{1296}=\frac{151}{648}$$

15

（解説）

箱 A を選ぶという事象を A，箱 B を選ぶという事象を B，白玉を取り出すという事象を W とする。

このとき，A と B は互いに排反である。

白玉を取り出す確率 $P(W)$ は

$$P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)$$

$$=P(A)P_A(W)+P(B)P_B(W)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{12}=\frac{2}{9}+\frac{1}{8}=\frac{25}{72}$$

よって，求める確率は

$$P_W(B)=\frac{P(B\cap W)}{P(W)}=\frac{1}{8}\div\frac{25}{72}=\frac{1}{8}\times\frac{72}{25}=\frac{9}{25}$$