

【定期試験対策講習】

1 学期 期末 対策教材①

中 2 六甲数学

【注意事項】

本教材は

数学 1 「2 次方程式・平方根」

数学 2 「相似の応用・線分比」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しを
してください。

【問題】

1

次の2次方程式を解きなさい。

(1) $x^2 = 25$ (2) $4x^2 = 64$ (3) $5x^2 - 7 = 0$

2

次の2次方程式を解きなさい。

(1) $(x+3)^2 = 25$ (2) $(x-5)^2 - 12 = 0$

3

次の2次方程式を $(x+m)^2 = n$ の形に変形して解きなさい。

(1) $x^2 + 7x + 3 = 0$ (2) $3x^2 - 4x - 1 = 0$

4

次の2次方程式を解きなさい。

(1) $2x^2 - 3x - 1 = 0$ (2) $x^2 = 3x + 3$ (3) $3x^2 - 2x - 2 = 0$

5

次の2次方程式を解きなさい。

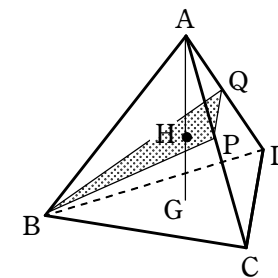
(1) $x^2 + 2x - 8 = 0$ (2) $2x^2 - 3x = 0$
(3) $x^2 + 6x + 9 = 0$ (4) $6x^2 + x - 12 = 0$

6

x の2次方程式 $x^2 - 4ax + a^2 + 12 = 0$ の解の1つは、2次方程式 $x^2 + 4x - 21 = 0$ の小さい方の解より5大きい。このとき、定数 a の値を求めなさい。

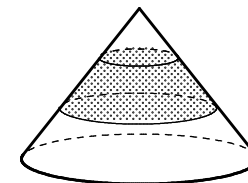
7

正四面体 $ABCD$ について、 $\triangle BCD$ の重心を G とする。辺 AC 、 AD の中点をそれぞれ P 、 Q とし、 $\triangle BPQ$ と線分 AG の交点を H とするとき、 $AH : HG$ を求めなさい。



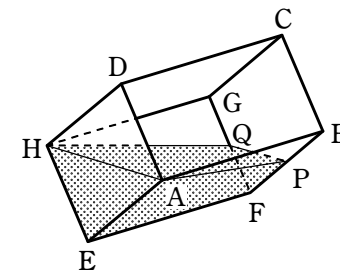
8

体積が $54\pi \text{ cm}^3$ の円錐を、底面に平行な平面で、高さが3等分されるように3つの立体に分けた。このとき、真ん中の立体の体積を求めなさい。



9

右の図は、 $AD = AE = 8 \text{ cm}$ 、 $AB = 12 \text{ cm}$ である直方体の容器 $ABCDEFGH$ に、水がいっぱいに入っていたものを傾けて、水面が四角形 $APQH$ になるところまで水を流しだしたものである。点 P 、 Q がそれぞれ辺 BF 、 FG の中点であるとき、容器に残っている水の体積を求めなさい。



10

次の計算をなさい。

- (1) $(2\sqrt{2}-1)^2-(\sqrt{2}+3)^2$ (2) $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2$
- (3) $(5-2\sqrt{6})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2$ (4) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$
- (5) $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$
- (6) $\frac{1}{12}\{(\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{21})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{21})^2\}$

11

$\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$ の整数部分を a 、小数部分を b とするとき、 a 、 b 、 b^2+ab+4 の値を求めよ。

12

$\sqrt{120-4a}$ が整数となる自然数 a は全部でいくつあるか答えなさい。

13

- (1) $11 \leq \sqrt{a} < 12$ を満たすような自然数 a の個数を求めなさい。
- (2) $\sqrt{2^3 \times 3^4 \times 5 \times 6^3 \times 7^3 \times a}$ が自然数となるような自然数 a のうち、最も小さいものを求めなさい。
- (3) $\sqrt{\frac{936}{x}}$ が自然数となるような自然数 x のうち、最も小さいものを求めなさい。

【解答&解説】

1

【解答】 (1) $x = \pm 5$ (2) $x = \pm 4$ (3) $x = \pm \frac{\sqrt{35}}{5}$

2

【解答】 (1) $x = 2, -8$ (2) $x = 5 \pm 2\sqrt{3}$

3

【解答】 (1) $x = \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{2}$ (2) $x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

4

【解答】 (1) $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$ (2) $x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$ (3) $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$

5

【解答】 (1) $x = -4, 2$ (2) $x = 0, \frac{3}{2}$ (3) $x = -3$ (4) $x = -\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$

6

【解答】 $a = -4$

7

【解答】 $3:2$

8

【解答】 $14\pi \text{ cm}^3$

9

【解答】 224 cm^3

10

【解答】 (1) $-2 - 10\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{2}$ (3) 6 (4) $10 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{15}$
(5) $4\sqrt{2} + 4\sqrt{6}$ (6) $\sqrt{5} + \sqrt{7}$

11

【解答】 $a = 5, b = 2\sqrt{2} - 2, b^2 + ab + 4 = 6 + 2\sqrt{2}$

12

【解答】 6 個

13

【解答】 (1) 23 (2) $a = 105$ (3) $x = 26$

1

【解説】

(1) $x = \pm\sqrt{25}$ すなわち $x = \pm 5$ 答

(2) $4x^2 = 64$

両辺を 4 でわると $x^2 = 16$

よって $x = \pm 4$ 答

(3) $5x^2 - 7 = 0$

-7 を右辺に移項すると $5x^2 = 7$

両辺を 5 でわると $x^2 = \frac{7}{5}$

よって $x = \pm\sqrt{\frac{7}{5}}$

すなわち $x = \pm\frac{\sqrt{35}}{5}$ 答

2

【解説】

(1) $(x+3)^2 = 25$

$x+3 = \pm 5$

すなわち $x+3 = 5$ または $x+3 = -5$

よって $x = 2$ または $x = -8$

答 $x = 2, -8$

(2) $(x-5)^2 - 12 = 0$

-12 を右辺に移項すると $(x-5)^2 = 12$

よって $x-5 = \pm 2\sqrt{3}$

すなわち $x-5 = 2\sqrt{3}$ または $x-5 = -2\sqrt{3}$

したがって $x=5+2\sqrt{3}$, $5-2\sqrt{3}$

答 $x=5\pm 2\sqrt{3}$

3

解説

(1) $x^2+7x+3=0$

$$x^2+7x=-3$$

$$x^2+7x+\left(\frac{7}{2}\right)^2=-3+\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{37}{4}$$

$$x+\frac{7}{2}=\pm\frac{\sqrt{37}}{2}$$

$$x=-\frac{7}{2}\pm\frac{\sqrt{37}}{2}$$

よって $x=\frac{-7\pm\sqrt{37}}{2}$ 答

(2) $3x^2-4x-1=0$

$$x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}=0$$

$$x^2-\frac{4}{3}x=\frac{1}{3}$$

$$x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$$

$$x-\frac{2}{3}=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$x=\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$$

よって $x=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$ 答

4

解説

(1) $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times 2\times (-1)}}{2\times 2}=\frac{3\pm\sqrt{9+8}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$ 答

(2) $x^2=3x+3$ から $x^2-3x-3=0$

よって $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times 1\times (-3)}}{2\times 1}=\frac{3\pm\sqrt{9+12}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$ 答

(3) $3x^2+2\times(-1)x-2=0$ であるから

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-3\times(-2)}}{3}=\frac{1\pm\sqrt{1+6}}{3}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$$
 答

5

解説

(1) 左辺を因数分解すると $(x+4)(x-2)=0$

よって $x+4=0$ または $x-2=0$

したがって $x=-4$ または $x=2$ 答 $x=-4, 2$

(2) 左辺を因数分解すると $x(2x-3)=0$

よって $x=0$ または $2x-3=0$

したがって $x=0$ または $x=\frac{3}{2}$ 答 $x=0, \frac{3}{2}$

(3) 左辺を因数分解すると $(x+3)^2=0$

よって $x+3=0$

したがって $x=-3$ 答

(4) 左辺を因数分解すると $(2x+3)(3x-4)=0$

よって $2x+3=0$ または $3x-4=0$

したがって $x=-\frac{3}{2}$ または $x=\frac{4}{3}$

答 $x=-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$

$$\begin{array}{rcl} 2 & \times & 3 \longrightarrow 9 \\ 3 & \times & -4 \longrightarrow -8 \\ \hline 6 & & -12 \qquad 1 \end{array}$$

6

(解説)

 $x^2 + 4x - 21 = 0$ を解くと $(x+7)(x-3) = 0$
よって $x = -7, 3$ したがって、 $x^2 - 4ax + a^2 + 12 = 0$ の解の1つは $-7+5$ 、すなわち -2 であるから

$$(-2)^2 - 4a \times (-2) + a^2 + 12 = 0$$

すなわち $a^2 + 8a + 16 = 0$ よって $(a+4)^2 = 0$ したがって $a = -4$

7

(解説)

直線 BG と辺 CD の交点を F とし、線分 AF と PQ の交点を I とする。

$\triangle ACD$ において、点 P, Q はそれぞれ辺 AC, AD の中点であるから、中点連結定理により

$$PQ \parallel CD$$

よって、中点連結定理の逆により

$$AI : IF = 1 : 1 \quad \dots\dots ①$$

線分 AG, BF を含む平面の上で考える。点 G は $\triangle BCD$ の重心であるから

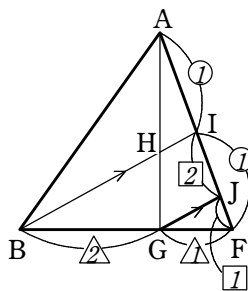
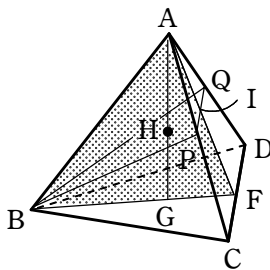
$$BG : GF = 2 : 1$$

ここで、 $BI \parallel GJ$ となるように辺 AF 上に点 J をとる。 $BI \parallel GJ$ であるから

$$IJ : JF = BG : GF = 2 : 1$$

よって、① から $IJ = \frac{2}{3} \times IF = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} AF = \frac{1}{3} AF$ $HI \parallel GJ$ であるから

$$AH : HG = AI : IJ = \frac{1}{2} AF : \frac{1}{3} AF = 3 : 2$$



8

(解説)

3等分された立体を、上から順に A, B, C とする。また、 A と B をあわせた円錐を D 、もとの円錐を E とする。 $A \sim D$ で、相似比は $1 : 2$ であるから

$$(A \text{ の体積}) : (D \text{ の体積}) = 1^3 : 2^3 = 1 : 8 \quad \dots\dots ①$$

 $A \sim E$ で、相似比は $1 : 3$ であるから

$$(A \text{ の体積}) : (E \text{ の体積}) = 1^3 : 3^3 = 1 : 27$$

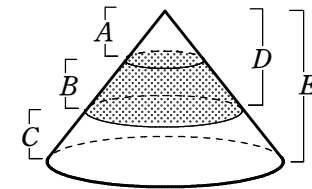
 E の体積が $54\pi \text{ cm}^3$ であるから

$$(A \text{ の体積}) = \frac{1}{27} \times (E \text{ の体積}) = \frac{1}{27} \times 54\pi = 2\pi (\text{cm}^3)$$

よって、① から

$$(D \text{ の体積}) = 8 \times (A \text{ の体積}) = 8 \times 2\pi = 16\pi (\text{cm}^3)$$

したがって $(B \text{ の体積}) = (D \text{ の体積}) - (A \text{ の体積})$
 $= 16\pi - 2\pi = 14\pi (\text{cm}^3)$



9

(解説)

図のように、 AP, EF, HQ の交点を O とする。 $PF \parallel AE$ であるから

$$OF : OE = PF : AE = 1 : 2$$

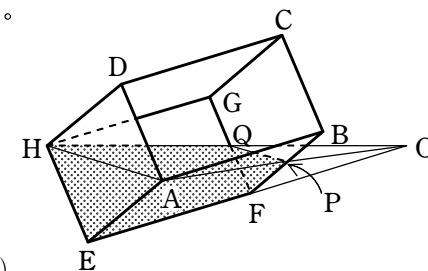
$$OF : (OF + 12) = 1 : 2$$

よって $OF = 12$ このとき、三角錐 $O-AEH$ の体積は

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 8 \right) \times (12 + 12) = 256 (\text{cm}^3)$$

三角錐 $O-PFQ$ の体積は

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \right) \times 12 = 32 (\text{cm}^3)$$

したがって、求める体積は $256 - 32 = 224 (\text{cm}^3)$ 

10

解説

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (2\sqrt{2}-1)^2 - (\sqrt{2}+3)^2 &= (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 1 + 1^2 - \{(\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times 3 + 3^2\} \\
 &= 8 - 4\sqrt{2} + 1 - (2 + 6\sqrt{2} + 9) \\
 &= -2 - 10\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 &= \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{4} - \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} \\
 &= \frac{(\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times 1 + 1^2}{4} - \frac{(\sqrt{2})^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 1 + 1^2}{4} \\
 &= \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2} + \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) \\
 &= \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad (3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2 &= (3\sqrt{2})^2 + 2 \times 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 \\
 &= 18 + 12\sqrt{6} + 12 = 6(5+2\sqrt{6})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって } (5-2\sqrt{6})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2 &= (5-2\sqrt{6}) \times 6(5+2\sqrt{6}) \\
 &= 6\{5^2 - (2\sqrt{6})^2\} \\
 &= 6(25-24) = 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad (\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^2 &= \{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}^2 \\
 &= (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 \\
 &= 2+2\sqrt{6}+3-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}+5 \\
 &= 10+2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}
 \end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^2 &= (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \times (-\sqrt{5}) + 2(-\sqrt{5}) \times \sqrt{2} \\
 &= 2+3+5+2\sqrt{6}-2\sqrt{15}-2\sqrt{10} \\
 &= 10+2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}
 \end{aligned}$$

$$(5) \quad (1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\} \times \{(1+\sqrt{3})-\sqrt{2}\}\{(1+\sqrt{3})+\sqrt{2}\} \\
 &= \{(1+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2\}\{(1+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2\} \\
 &= (1+2\sqrt{2}+2-3)(1+2\sqrt{3}+3-2) \\
 &= 2\sqrt{2}(2+2\sqrt{3}) = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \frac{1}{12} \{(\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{21})^2 - (\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{21})^2\} \\
 &= \frac{1}{12} \{[(\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{21}) + (\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{21})] \\
 &\quad \times [(\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{21}) - (\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{21})]\} \\
 &= \frac{1}{12} \times 2\sqrt{3} \times 2(\sqrt{15}+\sqrt{21}) \\
 &= \frac{1}{3}(3\sqrt{5}+3\sqrt{7}) = \sqrt{5} + \sqrt{7}
 \end{aligned}$$

11

解説

$$\frac{1}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = \frac{3+2\sqrt{2}}{3^2-(2\sqrt{2})^2} = 3+2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} = \sqrt{8} \text{ であり, } 4 < 8 < 9 \text{ であるから } 2 < \sqrt{8} < 3$$

$$\text{よって } 3+2 < 3+2\sqrt{2} < 3+3$$

$$\text{すなわち, } 3+2\sqrt{2} \text{ の整数部分 } a \text{ は } a=5$$

$$\text{また, 小数部分 } b \text{ は } b=3+2\sqrt{2}-a=2\sqrt{2}-2$$

$$\begin{aligned}
 \text{ゆえに } b^2+ab+4 &= b(b+a)+4 \\
 &= (2\sqrt{2}-2)(2\sqrt{2}+3)+4 \\
 &= 8+2\sqrt{2}-6+4 = 6+2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

12

解説

$$\sqrt{120-4a} = \sqrt{2^2 \times (30-a)}$$

$$\text{これが整数となるとき } 30-a=n^2 \text{ (} n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数)}$$

$$\text{すなわち } a=30-n^2$$

の形に表される。

a は自然数であるから、 n は 0 以上 5 以下の整数である。

よって、 a は全部で

$$5 - 0 + 1 = 6 \text{ (個)}$$

13

解説

(1) $11 = \sqrt{121}$, $12 = \sqrt{144}$ であるから $\sqrt{121} \leq \sqrt{a} < \sqrt{144}$

よって $121 \leq a < 144$

a は自然数であるから $121 \leq a \leq 143$

よって、求める自然数 a の個数は $143 - 121 + 1 = 23$

(2) $\sqrt{2^3 \times 3^4 \times 5 \times 6^3 \times 7^3 \times a}$ が自然数となるのは、 $2^3 \times 3^4 \times 5 \times 6^3 \times 7^3 \times a$ が自然数の 2 乗になるときである。

自然数の 2 乗になるためには、 $2^3 \times 3^4 \times 5 \times 6^3 \times 7^3 \times a$ を素因数分解したときに、すべての指数が偶数になっている必要がある。

$2^3 \times 3^4 \times 5 \times 6^3 \times 7^3 \times a = 2^6 \times 3^7 \times 5 \times 7^3 \times a$ であるから、このような条件を満たす a で最も小さいものは

$$a = 3 \times 5 \times 7 = 105$$

(3) $\sqrt{\frac{936}{x}}$ が自然数となるのは、 $\frac{936}{x}$ が自然数の 2 乗になるときである。

自然数の 2 乗になるためには、 $\frac{936}{x}$ を素因数分解したときに、すべての指数が偶数になっている必要がある。

$\frac{936}{x} = \frac{2^3 \times 3^2 \times 13}{x}$ であるから、このような条件を満たす x で最も小さいものは

$$x = 2 \times 13 = 26$$