【定期試験対策講習】

１学期
期末考査
対策教材①

高１甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｋ「空間ベクトル」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

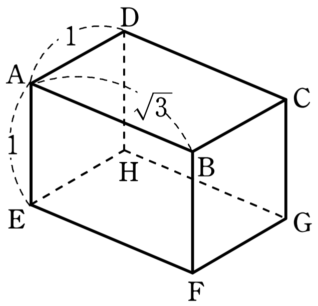
【問題】

$\boxed{1}$

右の図のような $\mathrm{AD}=\mathrm{AE}=1$，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$ の直方体 ABCD－EFGH において，次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GE}}$



$\boxed{2}$

A (3，2，4)，B (3，−1，1)，C (5，3，−3) とする。△ABC において，次のものを求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　(2) $\cos A$　(3) △ABC の面積

$\boxed{3}$

次の 4 点が同じ平面上にあるように，x の値を定めよ。

A (1，1，0)，B (3，4，5)，C (1，3，6)，P (4，5，x)

$\boxed{4}$

四面体 OABC の辺 OA，OB，OC をそれぞれ 1：2，1：1，2：1 に内分する点を順に D，E，F とする。頂点 O と △DEF の重心 G を通る直線が，3 点 A，B，C の定める平面 ABC と交わる点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ。

$\boxed{5}$

四面体 OABC の辺 OA，OC の中点を，それぞれ L，M とし，辺 OB を 2：1 に外分する点を N とする。直線 AB と LN，直線 BC と MN の交点を，それぞれ R，S とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) RS∥LM であることを示せ。

$\boxed{6}$

四面体 OABC の辺 OA，OB，OC を，それぞれ 1：1，2：1，3：1 に内分する点を，順に P，Q，R とする。点 C と △PQR の重心 G を通る直線が平面 OAB と交わる点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$\boxed{7}$

△ABC の垂心 H を通り，平面 ABC に垂直な直線を引き，その上に任意の点 P をとると，PA⊥BC であることを証明せよ。ただし，∠BAC は直角でないとする。

$\boxed{8}$

次の条件を満たす球面の方程式を求めよ。

(1) 2 点 A (1，2，4)，B (−5，8，−2) を直径の両端とする。

(2) 点 (5，1，4) を通り，3 つの座標平面に接する。

$\boxed{9}$

(1) 点 A (−2，0，1) を通り，$\vec{d}=(1,\ 3,\ -2)$ を方向ベクトルとする直線の方程式を求めよ。

(2) 2 点A (−2，1，−1)，B (1，3，2) を通る直線の方程式を求めよ。

$\boxed{10}$

次の 2 直線 $\ell:\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{4}$，　$m:\dfrac{x+8}{10}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+7}{7}$ のなす角 θ を求めよ。ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$ とする。

【解答&解説】

1

解答 (1) 3 (2) 3 (3) 0 (4) -1

2

解答 (1) 18 (2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (3) $9\sqrt{2}$

3

解答 $x=6$

4

解答 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

5

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$ (2) 略

6

解答 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{8}{27}\vec{b}$

7

解答 略

8

解答 (1) $(x+2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=27$

(2) $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$ または $(x-7)^2+(y-7)^2+(z-7)^2=49$

9

解答 (1) $x+2=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$ (2) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$

10

解答 30°

1

解説

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ のなす角は 0°

よって $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{DC}}|\cos 0°=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times 1=3$

(2) 三平方の定理から $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

また，$\angle\mathrm{CAB}=30°$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角は 30°

よって $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos 30°=\sqrt{3}\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$

(3) AB は平面 BFGC に垂直であるから，CF とも垂直である。

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ よって $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=0$

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{GE}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=2$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{GE}}$ のなす角は $90°+30°=120°$

よって $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GE}}=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\overrightarrow{\mathrm{GE}}|\cos 120°=1\times 2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

2

解説

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ -3,\ -3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ 1,\ -7)$

よって $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\times 2+(-3)\times 1+(-3)\times(-7)=18$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{0^2+(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{2^2+1^2+(-7)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

よって $\cos A=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{18}{3\sqrt{2}\times 3\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(3) $\sin A>0$ であるから

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

よって $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin A=\dfrac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times 3\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=9\sqrt{2}$

別解　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{18\times54-18^2}=\frac{1}{2}\sqrt{18\times36}=9\sqrt{2}$$

3

解説

〔解答 1〕　$\overrightarrow{AP}=(3,\ 4,\ x)$，$\overrightarrow{AB}=(2,\ 3,\ 5)$，$\overrightarrow{AC}=(0,\ 2,\ 6)$

3 点 A，B，C は一直線上にないから，点 P が平面 ABC 上にあるための条件は，

$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s，t があることである。

よって　$(3,\ 4,\ x)=s(2,\ 3,\ 5)+t(0,\ 2,\ 6)$

すなわち　$(3,\ 4,\ x)=(2s,\ 3s+2t,\ 5s+6t)$

ゆえに　$2s=3$，$3s+2t=4$，$5s+6t=x$

よって　$s=\dfrac{3}{2}$，$t=-\dfrac{1}{4}$　　したがって　$x=6$

〔解答 2〕　3 点 A，B，C は一直線上にないから，原点を O とすると，点 P が平面 ABC 上にあるための条件は，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$ となる実数 s，t，u があることである。

よって　$(4,\ 5,\ x)=s(1,\ 1,\ 0)+t(3,\ 4,\ 5)+u(1,\ 3,\ 6)$

すなわち　$(4,\ 5,\ x)=(s+3t+u,\ s+4t+3u,\ 5t+6u)$

ゆえに　$s+3t+u=4$，$s+4t+3u=5$，$5t+6u=x$

また　$s+t+u=1$

これらを解くと　$s=-\dfrac{1}{4}$，$t=\dfrac{3}{2}$，$u=-\dfrac{1}{4}$

したがって　$x=5\cdot\dfrac{3}{2}+6\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)=6$

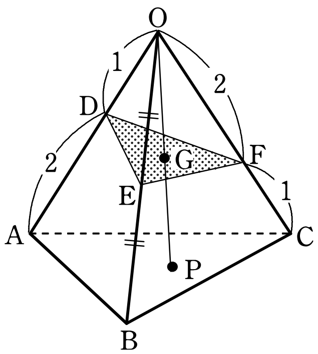
別解　3 点 A，B，C を通る平面の方程式を求めると　$2x-3y+z+1=0$

この平面上に点 P があるための条件は　$2\cdot4-3\cdot5+x+1=0$

よって　$x=6$

4

解説



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると

$$\overrightarrow{OD}=\frac{\vec{a}}{3},\quad \overrightarrow{OE}=\frac{\vec{b}}{2},\quad \overrightarrow{OF}=\frac{2}{3}\vec{c}$$

よって　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}}{3}$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\vec{a}}{3}+\frac{\vec{b}}{2}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$$

点 P は直線 OG 上にあるから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}$（$k$ は実数）とおけて

$$\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}\right)=\frac{k}{9}\vec{a}+\frac{k}{6}\vec{b}+\frac{2}{9}k\vec{c}\quad\cdots\cdots①$$

また，P は平面 ABC 上にあるから，s，t を実数として $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ と表される。

これを変形すると　$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

よって　$\overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\quad\cdots\cdots②$

①，② から　$\dfrac{k}{9}\vec{a}+\dfrac{k}{6}\vec{b}+\dfrac{2}{9}k\vec{c}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから

$$\frac{k}{9}=1-s-t,\quad \frac{k}{6}=s,\quad \frac{2}{9}k=t$$

ゆえに　$\dfrac{k}{9}=1-\dfrac{k}{6}-\dfrac{2k}{9}$　　これを解くと　$k=2$

$k=2$ を ① に代入して　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{4}{9}\vec{c}$

すなわち　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{9}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{OC}$

参考　一直線上にない 3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ の定める平面を α とするとき，次のことが成り立つ。

点 P$(\vec{p})$ が平面 α 上にある

$\iff \quad \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c},\ s+t+u=1$ （s，t，u は実数）

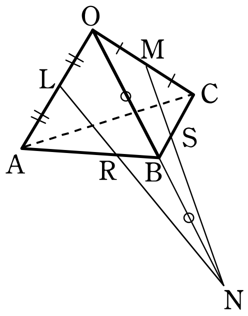
このことを利用すると，① から直ちに k の値を求めることができる。

(別解)　P は平面 ABC 上にあるから，① より

$$\frac{k}{9}+\frac{k}{6}+\frac{2}{9}k=1 \qquad \text{これを解くと} \qquad k=2$$

$\boxed{5}$

解説



(1)　AR：RB＝s：$(1-s)$，LR：RN＝t：$(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{OR}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$ ……①

$\overrightarrow{OR}=(1-t)\overrightarrow{OL}+t\overrightarrow{ON}=\dfrac{1-t}{2}\vec{a}+2t\vec{b}$ ……②

①，② から　$(1-s)\vec{a}+s\vec{b}=\dfrac{1-t}{2}\vec{a}+2t\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから

$1-s=\dfrac{1-t}{2}$，$s=2t$　　これを解いて　$s=\dfrac{2}{3}$，$t=\dfrac{1}{3}$

よって　$\overrightarrow{OR}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

また，BS：SC＝s'：$(1-s')$，NS：SM＝t'：$(1-t')$ とすると

$\overrightarrow{OS}=(1-s')\overrightarrow{OB}+s'\overrightarrow{OC}=(1-s')\vec{b}+s'\vec{c}$ ……③

$\overrightarrow{OS}=(1-t')\overrightarrow{ON}+t'\overrightarrow{OM}=2(1-t')\vec{b}+\dfrac{t'}{2}\vec{c}$ ……④

③，④ から　$(1-s')\vec{b}+s'\vec{c}=2(1-t')\vec{b}+\dfrac{t'}{2}\vec{c}$

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\not\parallel\vec{c}$ であるから

$1-s'=2(1-t')$，$s'=\dfrac{t'}{2}$　　これを解いて　$s'=\dfrac{1}{3}$，$t'=\dfrac{2}{3}$

よって　$\overrightarrow{OS}=\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(2)　(1) から　$\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR}=\left(\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)=\dfrac{1}{3}\vec{c}-\dfrac{1}{3}\vec{a}$

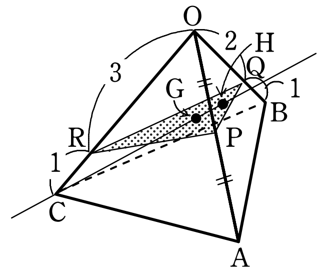
また　$\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OL}=\dfrac{1}{2}\vec{c}-\dfrac{1}{2}\vec{a}$

よって　$\overrightarrow{RS}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{LM}$

$\overrightarrow{RS}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{LM}\neq\vec{0}$ であるから　RS∥LM

$\boxed{6}$

解説



$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{OR}=\dfrac{3}{4}\vec{c}$

よって　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}}{3}$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{3}{4}\vec{c}\right)$

$=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$

H は直線 CG 上にあるから，$\overrightarrow{CH}=k\overrightarrow{CG}$ となる実数 k がある。

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OC}+k(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OC})$

$=\vec{c}+k\left(\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}-\vec{c}\right)$

$=\dfrac{1}{6}k\vec{a}+\dfrac{2}{9}k\vec{b}+\left(1-\dfrac{3}{4}k\right)\vec{c}$ ……①

また，H は平面 OAB 上にあるから，$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ となる実数 s，t がある。

よって　$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ ……②

①，② から　$\dfrac{1}{6}k\vec{a}+\dfrac{2}{9}k\vec{b}+\left(1-\dfrac{3}{4}k\right)\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから

$\dfrac{1}{6}k=s$，$\dfrac{2}{9}k=t$，$1-\dfrac{3}{4}k=0$　　これを解いて　$k=\dfrac{4}{3}$，$s=\dfrac{2}{9}$，$t=\dfrac{8}{27}$

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{8}{27}\vec{b}$

別解　（① までは同じ）

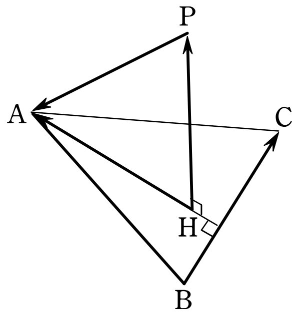
H は平面 OAB 上にあるから，$\overrightarrow{OH}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ だけで表される。

よって，① から　$1-\dfrac{3}{4}k=0$　ゆえに　$k=\dfrac{4}{3}$

これを ① に代入して　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{8}{27}\vec{b}$

$\boxed{7}$

(解説)



H は △ABC の垂心であるから　HA⊥BC

よって　$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ ……①

HP は平面 ABC に垂直であるから　HP⊥BC

よって　$\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ ……②

①，② から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HP})\cdot\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{PA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$ であるから　$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{BC}$

したがって　PA⊥BC

$\boxed{8}$

(解説)

(1)　この球面の中心 C は直径 AB の中点であるから

$$\mathrm{C}\left(\frac{1-5}{2},\ \frac{2+8}{2},\ \frac{4-2}{2}\right)\quad すなわち\quad \mathrm{C}(-2,\ 5,\ 1)$$

また，球面の半径を r とすると　$r^2=\mathrm{AC}^2=(-2-1)^2+(5-2)^2+(1-4)^2=27$

よって　$(x+2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=27$

(2)　球面が各座標平面に接し，かつ点 $(5,\ 1,\ 4)$ を通ることから，半径を r とすると，中心の座標は $(r,\ r,\ r)$ と表される。

ゆえに，球面の方程式は　$(x-r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2$

点 $(5,\ 1,\ 4)$ を通るから　$(5-r)^2+(1-r)^2+(4-r)^2=r^2$

よって　$r^2-10r+21=0$　ゆえに　$(r-3)(r-7)=0$

したがって　$r=3,\ 7$

よって　$(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$ または $(x-7)^2+(y-7)^2+(z-7)^2=49$

$\boxed{9}$

(解説)

(2)　直線 AB の方向ベクトルは　$\overrightarrow{AB}=(1,\ 3,\ 2)-(-2,\ 1,\ -1)=(3,\ 2,\ 3)$

よって，求める直線の方程式は　$\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$

$\boxed{10}$

(解説)

$\vec{d_1}=(5,\ 3,\ 4)$，$\vec{d_2}=(10,\ -1,\ 7)$ とすると，$\ell\,/\!/\,\vec{d_1}$，$m\,/\!/\,\vec{d_2}$ である。

$\vec{d_1}$ と $\vec{d_2}$ のなす角を α とすると

$$\cos\alpha=\frac{\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}}{|\vec{d_1}||\vec{d_2}|}=\frac{75}{5\sqrt{2}\times5\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ\leqq\alpha\leqq180^\circ$ であるから　$\alpha=30^\circ$

したがって　$\theta=\alpha=30^\circ$