【定期試験対策講習】

１学期
期末考査
対策教材②

中１甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｔ「整数」
数学Ｙ「角，三角形と四角形」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

次の数の組の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1)　336，756　　　　(2)　150，270，630

$\boxed{2}$

n は正の整数とする。n，175，250 の最大公約数が 25，最小公倍数が 3500 であるような n をすべて求めよ。

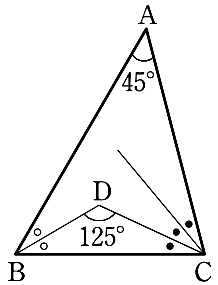
$\boxed{3}$

次のような条件を満たす 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

(1)　和が 160，最大公約数が 8　　　　(2)　積が 300，最小公倍数が 60

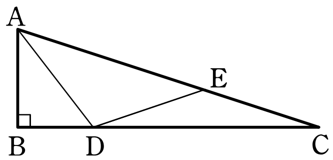
$\boxed{4}$

右の図の △ABC において，線分 BD は ∠ABC の二等分線，線分 CD は ∠BCA の三等分線のうちの 1 本である。∠BAC＝45°，∠BDC＝125° のとき，∠ABC の大きさを求めなさい。



$\boxed{5}$

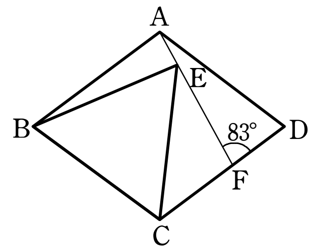
右の図で，△ABC は ∠B＝90° の直角三角形である。∠BAD＝∠CAD，AD＝DE＝EC のとき，∠ACB の大きさを求めなさい。



$\boxed{6}$

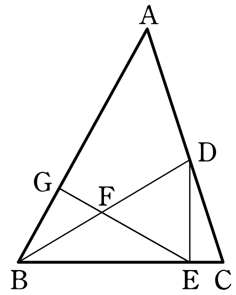
右の図で，四角形 ABCD はひし形，△EBC は正三角形である。また，直線 AE と辺 CD との交点を F とする。

∠EFD＝83° のとき，∠ADF の大きさを求めなさい。



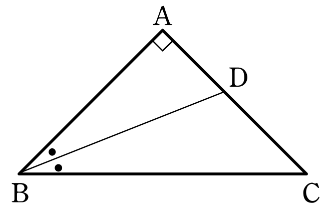
$\boxed{7}$

右の図のような，3 つの角が鋭角の △ABC がある。∠ABC の二等分線と辺 AC との交点を D とし，D から辺 BC に引いた垂線の足を E とする。E から辺 AB に垂線を引き，BD，AB との交点をそれぞれ F，G とする。このとき，ED＝EF であることを証明しなさい。



$\boxed{8}$

∠A＝90° の直角二等辺三角形 ABC において，∠B の二等分線が辺 AC と交わる点を D とする。このとき，AB＋AD＝BC であることを証明しなさい。

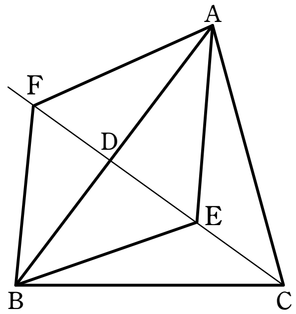


9

右の図のように，△ABC があり，D は辺 AB の中点，E は線分 CD の中点である。B を通り AE に平行な直線と CD の延長との交点を F とおく。

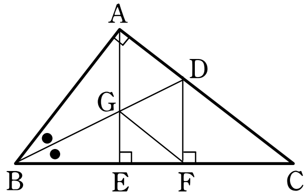
(1)　四角形 AEBF は平行四辺形であることを証明しなさい。

(2)　AB＝CD のとき，四角形 AEBF はどのような四角形であるか答えなさい。



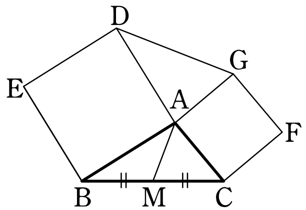
10

∠A＝90° の直角三角形 ABC で，∠B の二等分線と辺 AC との交点を D とする。また，点 A，D から辺 BC に下ろした垂線を，それぞれ AE，DF とし，AE と BD の交点を G とする。このとき，四角形 AGFD はひし形であることを証明しなさい。



11

右の図のように，△ABC の辺 AB，AC をそれぞれ 1 辺とする正方形 ADEB，ACFG をつくる。
このとき，辺 BC の中点を M とすると，GD＝2AM が成り立つことを証明しなさい。



$\boxed{1}$

解答　(1)　最大公約数 84，最小公倍数 3024

(2)　最大公約数 30，最小公倍数 9450

$\boxed{2}$

解答　$n=100,\ 500,\ 700,\ 3500$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$(a,\ b)=(8,\ 152),\ (24,\ 136),\ (56,\ 104),\ (72,\ 88)$

(2)　$(a,\ b)=(5,\ 60),\ (15,\ 20)$

$\boxed{4}$

解答　60°

$\boxed{5}$

解答　18°

$\boxed{6}$

解答　74°

$\boxed{7}$

解答　略

$\boxed{8}$

解答　略

$\boxed{9}$

解答　(1)　略　　(2)　長方形

$\boxed{10}$

解答　略

$\boxed{11}$

解答　略

$\boxed{1}$

解説

(1)　336，756 を素因数分解すると

$$336=2^4\cdot 3\cdot 7$$

$$756=2^2\cdot 3^3\cdot 7$$

よって，最大公約数は　$2^2\cdot 3\cdot 7=84$　　最小公倍数は　$2^4\cdot 3^3\cdot 7=3024$

(2)　150，270，630 を素因数分解すると

$$150=2\cdot 3\cdot 5^2$$

$$270=2\cdot 3^3\cdot 5$$

$$630=2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$$

よって，最大公約数は　$2\cdot 3\cdot 5=30$　　最小公倍数は　$2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7=9450$

参考　共通な素因数で割っていく方法で，最大公約数と最小公倍数を求めることもできる。この方法で，(2) を求めてみよう。

[1]　最大公約数を求める方法

すべての数の共通な素因数で割っていき，商に共通な素因数がなくなったら，終了する。

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 150 & 270 & 630 \\ \hline 3 & 75 & 135 & 315 \\ \hline 5 & 25 & 45 & 105 \\ \hline & 5 & 9 & 21 \end{array}$$

縦に並んだ数の積が最大公約数

よって　$2\cdot 3\cdot 5=30$

[2]　最小公倍数を求める方法

2 つ以上の数の共通な素因数で割っていき，割り切れない数はそのまま下に下ろす。商の公約数が 1 だけになったら，終了する。

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 150 & 270 & 630 \\ \hline 3 & 75 & 135 & 315 \\ \hline 5 & 25 & 45 & 105 \\ \hline 3 & 5 & 9 & 21 \\ \hline & 5 & 3 & 7 \end{array}$$

L 字型に並んだ数の積が最小公倍数

よって　$2\cdot 3\cdot 5\cdot 3\cdot 5\cdot 3\cdot 7=9450$

$\boxed{2}$

解説

175 と 250 を素因数分解すると

$$175=5^2\cdot 7,\quad 250=2\cdot 5^3$$

また，25 と 3500 を素因数分解すると

$$25=5^2,\quad 3500=2^2\cdot 5^3\cdot 7$$

よって，最大公約数，最小公倍数の条件から，n は

$$2^2\cdot 5^a\cdot 7^b\qquad \text{ただし}\quad a=2,\ 3\qquad b=0,\ 1$$

と表される。

したがって，求める整数 n は

$$n=2^2\cdot5^2\cdot7^0,\ 2^2\cdot5^3\cdot7^0,\ 2^2\cdot5^2\cdot7^1,\ 2^2\cdot5^3\cdot7^1$$

すなわち　$n=100,\ 500,\ 700,\ 3500$

3

解説

(1)　最大公約数が 8 であるから，a，b は

$$a=8a',\ b=8b'$$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

$a+b=160$ であるから

$$8a'+8b'=160\quad すなわち\quad a'+b'=20$$

$a'+b'=20$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$$(a',\ b')=(1,\ 19),\ (3,\ 17),\ (7,\ 13),\ (9,\ 11)$$

よって　$(a,\ b)=(8,\ 152),\ (24,\ 136),\ (56,\ 104),\ (72,\ 88)$

(2)　最大公約数を g とすると，a，b は

$$a=ga',\ b=gb'$$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a，b の積と最大公約数，最小公倍数の積は等しいから

$$300=g\cdot60\qquad よって\quad g=5$$

最小公倍数が 60 であるから

$$ga'b'=60\quad すなわち\quad 5a'b'=60$$

よって　$a'b'=12$

$a'b'=12$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$$(a',\ b')=(1,\ 12),\ (3,\ 4)$$

したがって　$(a,\ b)=(5,\ 60),\ (15,\ 20)$

4

解説

△ABC において

$$\angle ABC+\angle ACB=180^\circ-45^\circ=135^\circ$$

△DBC において

$$\angle DBC+\angle DCB=180^\circ-125^\circ=55^\circ$$

これらのことを図の記号 ○，● で表すと

○＋○＋●＋●＋●＝135°　…… ①

○＋●＝55°　…… ②

② より　○＋○＋●＋●＝55°×2＝110°

であるから，① との差を考えて　●＝25°

これと ② から　○＝30°

したがって　$\angle ABC=60^\circ$

参考　○ を a°，● を b° で表すと，①，② は

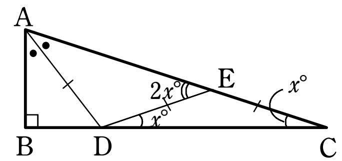
$$連立方程式\quad \begin{cases}2a+3b=135\\ a+b=55\end{cases}$$

で表される。

連立方程式の解き方を学習している場合には，上の連立方程式を解いて答えを求めてもよい。

5

解説



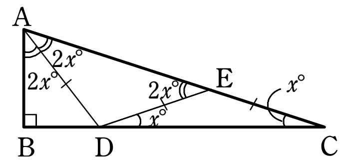
$\angle ACB$ の大きさを x° とする。

△DCE は DE＝EC の二等辺三角形であるから

$$\angle EDC=\angle ECD=x^\circ$$

△DCE において，内角と外角の性質により

$$\angle DEA=x^\circ+x^\circ=2x^\circ$$



△ADE は AD＝DE の二等辺三角形であるから

$$\angle EAD=\angle DEA=2x^\circ$$

仮定より $\angle BAD=\angle CAD$ であるから

$$\angle BAD=2x^\circ$$

よって　$\angle BAC=2x^\circ+2x^\circ=4x^\circ$

以上より，△ABC の内角の和について

$$4x^\circ+x^\circ+90^\circ=180^\circ$$

これを解くと　$x^\circ=18^\circ$　すなわち　$\angle ACB=18^\circ$　答

6

(解説)

四角形 ABCD はひし形であるから　$AB=BC$

△EBC は正三角形であるから　$BC=EB$

よって，$AB=EB$ であるから　$\angle BAE=\angle BEA$

また，$AB /\!/ DC$ であるから　$\angle BAE=\angle EFD=83°$

よって　$\angle ABE=180°-83°\times 2=14°$

したがって　$\angle ABC=14°+60°=74°$

ひし形の対角は等しいから

$\angle ADF=\angle ABC=74°$

7

(解説)

△FGB と △DEB において

線分 BD は ∠ABC の二等分線であるから

$\angle FBG=\angle DBE$

また　$\angle FGB=\angle DEB=90°$

したがって，△FGB と △DEB の残りの角も等しいから

$\angle BFG=\angle EDF$

対頂角は等しいから

$\angle EFD=\angle BFG$

よって　$\angle EFD=\angle EDF$

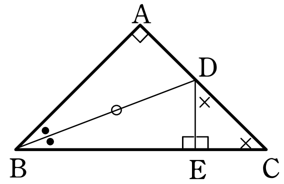
したがって，2 つの角が等しいから，△EDF は二等辺三角形である。

したがって　$ED=EF$

8

(解説)

証明　点 D から辺 BC に下した垂線の足を E とする。



△ABD と △EBD において

仮定より　$\angle BAD=\angle BED=90°$

$\angle ABD=\angle EBD$

また　$BD=BD$（共通）

直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABD\equiv\triangle EBD$

よって　$AD=DE$　……①

$AB=EB$　……②

また，△DEC は直角三角形で，△ABC が直角二等辺三角形であるから

$\angle C=45°$　よって　$\angle CDE=45°$

したがって　$DE=EC$　……③

①，③から　$AD=EC$　……④

②，④より，　$AB+AD=EB+EC=BC$　終

9

(解説)

(1)　△ADE と △BDF において

点 D は辺 AB の中点であるから

$AD=BD$　……①

対頂角は等しいから　$\angle ADE=\angle BDF$　……②

また，仮定から　$AE /\!/ FB$　……③

よって，錯角は等しいから　$\angle DAE=\angle DBF$　……④

①，②，④ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ADE\equiv\triangle BDF$　……⑤

よって　$AE=BF$　……⑥

③，⑥ より，四角形 AEBF は，1 組の対辺が平行で等しいから，平行四辺形である。

(2)　点 E は線分 CD の中点であるから

CE＝ED　……⑦

また，⑤から　ED＝FD　……⑧

⑦，⑧から　FE＝ED＋FD＝CE＋ED＝CD

仮定より，AB＝CD であるから　AB＝FE　……⑨

△AEB と △FBE において　EB＝BE（共通）……⑩

⑥，⑨，⑩より，3 組の辺がそれぞれ等しいから

△AEB≡△FBE

よって　∠AEB＝∠FBE　……⑪

(1) より，四角形 AEBF は平行四辺形であるから，2 組の対角はそれぞれ等しい。

すなわち　∠AEB＝∠AFB

∠FBE＝∠FAE

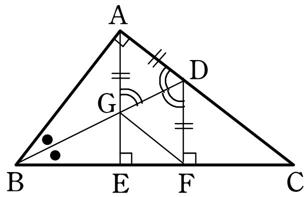
これらと，⑪から

∠AEB＝∠AFB＝∠FBE＝∠FAE

したがって，四角形 AEBF は，4 つの角がすべて等しいから，長方形である。

10

解説



証明　△ABD と △FBD において

∠BAD＝∠BFD＝90°

BD＝BD（共通）

点 D は ∠B の二等分線上にあるから

∠ABD＝∠FBD

よって，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから　△ABD≡△FBD

したがって　AD＝FD　……①

∠ADB＝∠FDB　……②

また，AG⊥BC，DF⊥BC であるから

AG∥DF　……③

よって　∠AGD＝∠FDG　……④

②より ∠ADG＝∠FDG であり，これと④から

∠AGD＝∠ADG

よって　AG＝AD　……⑤

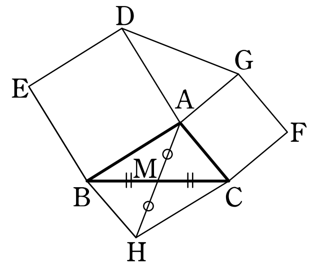
①，⑤から　AG＝FD　……⑥

③，⑥より，四角形 AGFD は，1 組の対辺が平行で等しいから，平行四辺形である。

さらに，⑤より，平行四辺形 AGFD は，隣り合う 2 辺が等しいから，ひし形である。 終

11

解説



中線 AM の延長上に，HM＝AM となる点 H をとると，

四角形 ABHC は平行四辺形になる。

△AHC と △GDA において，

四角形 ACFG は正方形であるから

AC＝GA　……①

四角形 ADEB は正方形であるから

AB＝AD　……②

四角形 ABHC は平行四辺形であるから

CH＝AB　……③

②，③から　CH＝AD　……④

また　∠HCA＝180°−∠BAC

∠DAG＝360°−(90°＋∠BAC＋90°)

＝180°−∠BAC

よって　∠HCA＝∠DAG　……⑤

①，④，⑤より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから　△AHC≡△GDA

したがって　AH＝GD

AH＝2AM であるから　GD＝2AM　終