

【定期試験対策講習】

# 1 学期 期**末** 考 査 対策教材①

## 中 3 女学院数学

【注意事項】

本教材は

数学 I 「三角比」の後半

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しを  
してください。

【問題】

1

$\triangle ABC$ において、 $a=\sqrt{2}$ 、 $b=2$ 、 $A=30^\circ$ のとき、 $c$ 、 $B$ 、 $C$ を求めよ。

2

$\triangle ABC$ において、 $\frac{\sin A}{\sqrt{7}} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \sin C$ が成り立つとき

- (1)  $\triangle ABC$ の内角のうち、最も大きい角の大きさを求めよ。
- (2)  $\triangle ABC$ の内角のうち、2番目に大きい角の正接を求めよ。

3

$\triangle ABC$ において、 $\sin C = \cos B \sin A$ が成り立つとき、 $\triangle ABC$ はどのような形をしているか。

4

- (1) 1辺の長さが1の正八角形の面積を求めよ。
- (2)  $\triangle ABC$ において、 $AB=8$ 、 $AC=5$ 、 $\angle A=120^\circ$ とする。 $\angle A$ の二等分線と辺  $BC$ の交点を  $D$  とするとき、線分  $AD$ の長さを求めよ。

5

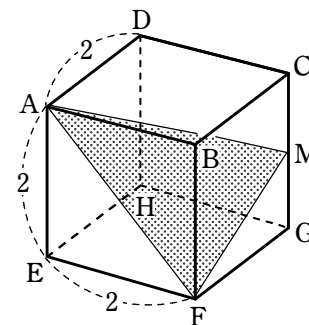
円  $O$  に内接する四角形  $ABCD$  において、  
 $AB=3$ 、 $BC=1$ 、 $CD=3$ 、 $DA=4$   
 とするとき、次のものを求めよ。

- (1)  $A$  (2) 対角線  $BD$  の長さ (3) 四角形  $ABCD$  の面積
- (4) 円  $O$  の半径 (5)  $\triangle ABD$ の内接円の半径

6

右の図の立方体  $ABCD-EFGH$  において、辺  $CG$  の中点を  $M$  とする。次のものを求めよ。

- (1)  $AF$ 、 $AM$ 、 $FM$  の長さ
- (2)  $\angle FAM$  の大きさ
- (3)  $\triangle AFM$  の面積



7

$PA=PB=PC=3$ 、 $AB=2$ 、 $BC=3$ 、 $CA=\sqrt{7}$  である三角錐  $PABC$  がある。頂点  $P$  から底面  $ABC$  へ下ろした垂線と底面  $ABC$  との交点を  $H$  とする。次の値を求めよ。

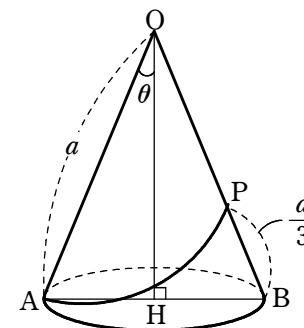
- (1)  $AH$  の長さ (2)  $PH$  の長さ
- (3)  $\triangle ABC$  の面積 (4) 三角錐  $PABC$  の体積

8

右の図の直円錐で、 $H$  は円の中心、線分  $AB$  は直径、  
 $OH$  は円に垂直で、 $OA=a$ 、 $\sin \theta = \frac{1}{3}$  とする。

点  $P$  が母線  $OB$  上にあり、 $PB = \frac{a}{3}$  とするとき、

点  $A$  からこの直円錐の側面を通して点  $P$  に至る最短経路の長さを求めよ。



9

$\triangle ABC$ において、辺  $BC$  を  $1:2$  に分ける点を  $D$  とする。 $a=6$ 、 $b=5$ 、 $c=7$  のとき、 $AD$  の長さを求めよ。

【解答&解説】

1

解答  $c = \sqrt{3} + 1, B = 45^\circ, C = 105^\circ$  または  $c = \sqrt{3} - 1, B = 135^\circ, C = 15^\circ$

2

解答 (1)  $150^\circ$  (2)  $\frac{\sqrt{3}}{5}$

3

解答  $A = 90^\circ$  の直角三角形

4

解答 (1)  $2(1 + \sqrt{2})$  (2)  $\frac{40}{13}$

5

解答 (1)  $A = 60^\circ$  (2)  $BD = \sqrt{13}$  (3)  $\frac{15\sqrt{3}}{4}$  (4)  $\frac{\sqrt{39}}{3}$  (5)  $\frac{7\sqrt{3} - \sqrt{39}}{6}$

6

解答 (1)  $AF = 2\sqrt{2}, AM = 3, FM = \sqrt{5}$  (2)  $45^\circ$  (3) 3

7

解答 (1)  $\frac{\sqrt{21}}{3}$  (2)  $\frac{2\sqrt{15}}{3}$  (3)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  (4)  $\sqrt{5}$

8

解答  $\frac{\sqrt{7}}{3}a$

9

解答  $AD = \sqrt{33}$

1

解説

余弦定理により  $(\sqrt{2})^2 = 2^2 + c^2 - 2 \cdot 2c \cos 30^\circ$

よって  $c^2 - 2\sqrt{3}c + 2 = 0$  したがって  $c = \sqrt{3} \pm 1$

[1]  $c = \sqrt{3} + 1$  のとき

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2^2}{2(\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

ゆえに  $B = 45^\circ$

よって  $C = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$

[2]  $c = \sqrt{3} - 1$  のとき

$$\cos B = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2^2}{2(\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{2}} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ゆえに  $B = 135^\circ$  よって  $C = 180^\circ - (30^\circ + 135^\circ) = 15^\circ$

以上から  $c = \sqrt{3} + 1, B = 45^\circ, C = 105^\circ$

または  $c = \sqrt{3} - 1, B = 135^\circ, C = 15^\circ$

別解 正弦定理から  $\frac{2}{\sin B} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$  ゆえに  $\sin B = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$A = 30^\circ$  より,  $0^\circ < B < 150^\circ$  であるから  $B = 45^\circ, 135^\circ$

[1]  $B = 45^\circ$  のとき

$$\begin{aligned} C &= 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ \\ c &= b \cos A + a \cos B \\ &= 2 \cos 30^\circ + \sqrt{2} \cos 45^\circ \\ &= \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

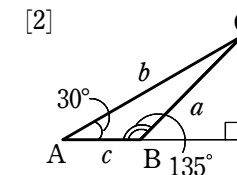
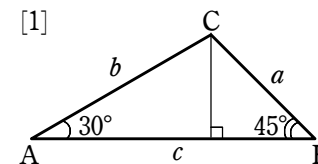
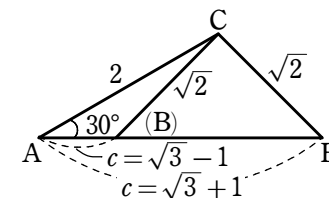
[2]  $B = 135^\circ$  のとき

$$\begin{aligned} C &= 180^\circ - (30^\circ + 135^\circ) = 15^\circ \\ c &= b \cos A + a \cos B \\ &= 2 \cos 30^\circ + \sqrt{2} \cos 135^\circ \\ &= \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

2

解説

(1) 正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  から  $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$



条件から  $\sin A : \sin B : \sin C = \sqrt{7} : \sqrt{3} : 1$

よって  $a : b : c = \sqrt{7} : \sqrt{3} : 1$

ゆえに、 $a = \sqrt{7}k$ ,  $b = \sqrt{3}k$ ,  $c = k$  ( $k > 0$ ) とおける。

よって、 $a$  が最大の辺であるから、 $\angle A$  が最大の角である。

$$\text{余弦定理により} \quad \cos A = \frac{(\sqrt{3}k)^2 + k^2 - (\sqrt{7}k)^2}{2 \cdot \sqrt{3}k \cdot k} = \frac{-3k^2}{2\sqrt{3}k^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって、最大の角の大きさは  $A = 150^\circ$

(2) (1) から、2 番目に大きい角は  $\angle B$

$$\text{余弦定理により} \quad \cos B = \frac{k^2 + (\sqrt{7}k)^2 - (\sqrt{3}k)^2}{2 \cdot k \cdot \sqrt{7}k} = \frac{5k^2}{2\sqrt{7}k^2} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$$

$1 + \tan^2 B = \frac{1}{\cos^2 B}$  であるから

$$\tan^2 B = \frac{1}{\cos^2 B} - 1 = \left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2 - 1 = \frac{28}{25} - 1 = \frac{3}{25}$$

$A > 90^\circ$  より  $B < 90^\circ$  であるから  $\tan B > 0$

$$\text{したがって} \quad \tan B = \sqrt{\frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

3

解説

$\triangle ABC$  の外接円の半径を  $R$  とする。

$$\text{正弦定理により} \quad \sin C = \frac{c}{2R}, \quad \sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\text{余弦定理により} \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

これらを等式  $\sin C = \cos B \sin A$  に代入すると

$$\frac{c}{2R} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \cdot \frac{a}{2R} \quad \text{すなわち} \quad \frac{c}{2R} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4cR}$$

$$\text{両辺に } 4cR \text{ を掛けて} \quad 2c^2 = c^2 + a^2 - b^2 \quad \text{すなわち} \quad b^2 + c^2 = a^2$$

よって、 $\triangle ABC$  は  $A = 90^\circ$  の直角三角形である。

4

解説

(1) 図のように、正八角形を 8 個の合同な三角形に分け、3 点

$O, A, B$  をとると  $\angle AOB = 360^\circ \div 8 = 45^\circ$

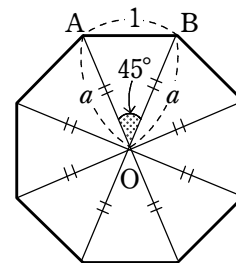
$OA = OB = a$  とすると、余弦定理により

$$1^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos 45^\circ$$

整理して  $(2 - \sqrt{2})a^2 = 1$

$$\text{ゆえに} \quad a^2 = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

よって、求める面積は  $8\triangle OAB = 8 \cdot \frac{1}{2} a^2 \sin 45^\circ = 2(1 + \sqrt{2})$

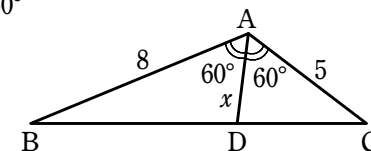


(2)  $AD = x$  とする。 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$  であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot x \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x \cdot \sin 60^\circ$$

よって  $40 = 8x + 5x$

$$\text{これを解いて} \quad x = AD = \frac{40}{13}$$



5

解説

(1)  $BD = x$  とする。 $\triangle ABD$  に余弦定理を適用して

$$x^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos A \quad \dots\dots ①$$

四角形 ABCD は円に内接するから  $C = 180^\circ - A$

$\triangle BCD$  に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned} x^2 &= 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cos(180^\circ - A) \\ &= 1^2 + 3^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 \cos A \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

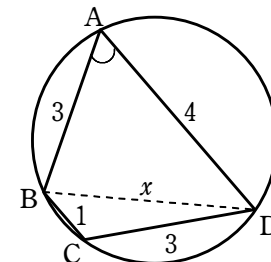
$$\text{①, ② から} \quad 25 - 24 \cos A = 10 + 6 \cos A$$

$$\text{よって} \quad \cos A = \frac{1}{2} \quad \text{したがって} \quad A = 60^\circ$$

(2) ① より  $x^2 = 9 + 16 - 24 \cos 60^\circ = 13$

$$x > 0 \text{ であるから} \quad x = \sqrt{13} \quad \text{よって} \quad BD = \sqrt{13}$$

(3)  $A = 60^\circ$  より  $C = 120^\circ$



四角形 ABCD の面積を  $S$  とすると

$$S = \triangle ABD + \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \sin 120^\circ$$

$$= \frac{12\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

(4) 円  $O$  は  $\triangle ABD$  の外接円である。求める半径を  $R$  とすると

$$\text{正弦定理より, } \frac{\sqrt{13}}{\sin 60^\circ} = 2R \quad \therefore R = \frac{\sqrt{13}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{39}}{3}$$

(5)  $\triangle ABD$  の内接円の半径を  $r$  とすると

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} r (AB + BD + DA)$$

$$\text{より } \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times r \times (3 + 4 + \sqrt{13})$$

$$r = \frac{3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{7 + \sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{3}(7 - \sqrt{13})}{(7 + \sqrt{13})(7 - \sqrt{13})} = \frac{7\sqrt{3} - \sqrt{39}}{6}$$

6

解説

(1) 三平方の定理から  $AF = \sqrt{AE^2 + EF^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

同様に  $AC = 2\sqrt{2}$

よって  $AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

また  $FM = \sqrt{FG^2 + MG^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

(2)  $\triangle AFM$  において、余弦定理により

$$\cos \angle FAM = \frac{AF^2 + AM^2 - FM^2}{2AF \cdot AM} = \frac{8 + 9 - 5}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって  $\angle FAM = 45^\circ$

(3)  $\triangle AFM = \frac{1}{2} AF \cdot AM \sin \angle FAM = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \sin 45^\circ = 3$

7

解説

$PA = PB = PC$  であるから、 $P$  から下ろした垂線と底面  $ABC$  との交点  $H$  は  $\triangle ABC$  の外接円の中心である。

(1)  $\angle ABC = \theta$  とおく。

$\triangle ABC$  において 余弦定理により

$$\cos \theta = \frac{2^2 + 3^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ゆえに } \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって 正弦定理により

$$AH = \frac{\sqrt{7}}{2 \sin \theta} = \frac{\sqrt{7}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

(2)  $PH^2 = PA^2 - AH^2 = 3^2 - \left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2 = \frac{20}{3}$

$$PH > 0 \text{ であるから } PH = \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

(3) (1) から  $\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

(4) 三角錐  $PABC$  の体積を  $V$  とすると  $V = \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times PH$  であるから

$$(2), (3) \text{ より } V = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{15}}{3} = \sqrt{5}$$

8

解説

$AB = 2r$  とすると、 $\triangle OAH$  で、 $AH = r$ ,

$\angle OHA = 90^\circ$ ,  $\sin \theta = \frac{1}{3}$  であるから  $\frac{r}{a} = \frac{1}{3}$

側面を直線 OA で切り開いた展開図は、図のような、中心 O、半径  $OA = a$  の扇形である。

中心角を  $x$  とすると、図の弧  $ABA'$  の長さについて

$$2\pi a \cdot \frac{x}{360^\circ} = 2\pi r$$

$\frac{r}{a} = \frac{1}{3}$  であるから  $x = 360^\circ \cdot \frac{r}{a} = 360^\circ \cdot \frac{1}{3} = 120^\circ$

ここで、求める最短経路の長さは、図の線分 AP の長さであるから、 $\triangle OAP$  において、余弦定理により

$$AP^2 = OA^2 + OP^2 - 2OA \cdot OP \cos 60^\circ = a^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2 - 2a \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{9}a^2$$

$AP > 0$  であるから、求める最短経路の長さは  $\frac{\sqrt{7}}{3}a$

9

解説

$\triangle ABC$  において、余弦定理により

$$\cos B = \frac{7^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{5}{7}$$

また  $BD = 2$

$\triangle ABD$  において、余弦定理により

$$AD^2 = 7^2 + 2^2 - 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \frac{5}{7} = 33$$

$AD > 0$  であるから  $AD = \sqrt{33}$

