

【定期試験対策講習】

1 学期 期末 対策教材②

中 2 六甲数学

【注意事項】

本教材は

数学 1 「2 次方程式」の計算(発展)

数学 2 「中点連結定理」「相似と面積比・体積比」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

【問題】

1

次の2次方程式を解きなさい。

$$(1) (2x-1)(x-1)=x(2-x) \quad (2) \frac{x^2-2}{2}-\frac{x^2-5x}{3}=3$$

2

x の2次方程式 $x^2+ax+4=0$ が $x=-3+\sqrt{5}$ を解にもつとき、定数 a の値ともう1つの解を求めなさい。

3

次の方程式を解きなさい。

$$(1) x^4-7x^2+12=0 \quad (2) (x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=0$$

4

2次方程式 $x^2-8x+3=0$ の2つの解を a, b とするとき、 $(a^2-8a)(b^2-8b+2)$ の値を求めなさい。

5

x の2次方程式 $2x^2+ax-b=0$ が3と-5を解にもつとき、定数 a, b の値を求めなさい。

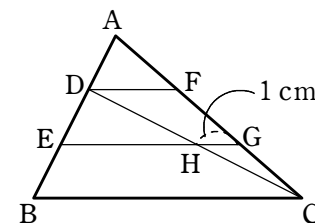
6

- (1) x の2次方程式 $x^2+5x-m-1=0$ の実数解の個数が2個となるような、定数 m の値の範囲を求めなさい。
- (2) x の2次方程式 $x^2+(a-2)x+a-2=0$ の実数解の個数が1個となるような、定数 a の値とそのときの実数解を求めなさい。

7

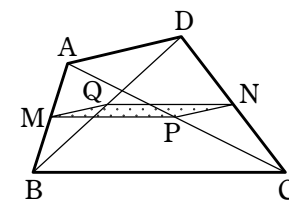
右の図において、点 D, E は辺 AB を3等分した点であり、点 F, G は辺 AC を3等分した点である。線分 DC, EG の交点を H とすると、 $HG=1\text{ cm}$ である。

- (1) 点 H は線分 DC の中点であることを証明しなさい。
- (2) 線分 DF, EH, BC の長さをそれぞれ求めなさい。



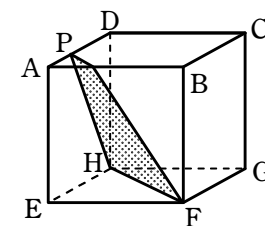
8

四角形 $ABCD$ の辺 AB, CD の中点をそれぞれ M, N とし、対角線 AC, BD の中点をそれぞれ P, Q とするとき、四角形 $MPNQ$ は平行四辺形であることを証明しなさい。



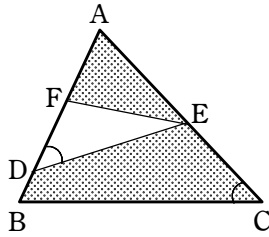
9

立方体 $ABCD-EFGH$ の辺 AD を1:2に内分する点を P とし、3点 P, H, F を通る平面で立方体を切って2つの立体に分ける。頂点 A を含む方の立体の体積は、もとの立方体の体積の何倍か答えなさい。



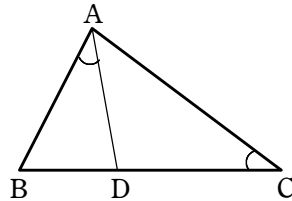
10

右の図で、 $\angle ACB = \angle ADE$ であり、F は線分 AD の中点である。BC : DE = 3 : 2 のとき、 $\triangle AFE$ の面積は四角形 DBCE の面積の何倍か答えなさい。



11

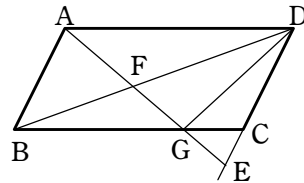
$\triangle ABC$ の辺 BC 上に点 D を $\angle BAD = \angle ACB$ となるようにとる。
このとき、 $AC^2 : AD^2 = BC : BD$ であることを証明しなさい。



12

右の図の四角形 ABCD は平行四辺形である。
次のことを証明しなさい。

- (1) $\triangle FAB = \triangle FDG$
- (2) $BF^2 : FD^2 = FG : FE$



【解答&解説】

1

【解答】 (1) $x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$ (2) $x = 2, -12$

2

【解答】 $a = 6$, もう1つの解 $x = -3 - \sqrt{5}$

3

【解答】 (1) $x = \pm\sqrt{3}, \pm 2$ (2) $x = 1, 2, 3, 4$

4

【解答】 3

5

【解答】 $a = 4, b = 30$

6

【解答】 (1) $m > -\frac{29}{4}$ (2) $a = 2$ のとき $x = 0$, $a = 6$ のとき $x = -2$

7

【解答】 (1) 略 (2) $DF = 2 \text{ cm}$, $EH = 3 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$

8

【解答】 略

9

【解答】 $\frac{13}{54}$ 倍

10

【解答】 $\frac{2}{5}$ 倍

11

【解答】 略

12

【解答】 (1) 略 (2) 略

1

【解説】

(1) $(2x-1)(x-1) = x(2-x)$

$$2x^2 - 3x + 1 = 2x - x^2$$

整理すると $3x^2 - 5x + 1 = 0$

よって $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$ 答

(2) $\frac{x^2-2}{2} - \frac{x^2-5x}{3} = 3$

両辺に6をかけて $3(x^2-2) - 2(x^2-5x) = 18$

$$3x^2 - 6 - 2x^2 + 10x = 18$$

整理すると $x^2 + 10x - 24 = 0$

左辺を因数分解すると $(x-2)(x+12) = 0$

よって $x = 2, -12$ 答

2

【解説】

$x^2 + ax + 4 = 0$ が $x = -3 + \sqrt{5}$ を解にもつから

$$(-3 + \sqrt{5})^2 + a \times (-3 + \sqrt{5}) + 4 = 0$$

すなわち $(9 - 6\sqrt{5} + 5) + (-3 + \sqrt{5})a + 4 = 0$

よって $(3 - \sqrt{5})a = 18 - 6\sqrt{5}$

したがって $a = \frac{18 - 6\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{6(3 - \sqrt{5})}{3 - \sqrt{5}} = 6$

$a = 6$ のとき, 2次方程式は次のようになる。

$$x^2 + 6x + 4 = 0$$

よって $x = -3 \pm \sqrt{3^2 - 1 \times 4} = -3 \pm \sqrt{5}$

したがって, もう1つの解は $x = -3 - \sqrt{5}$

3

【解説】

(1) $x^2=t$ とおくと、方程式は次のようになる。

$$t^2-7t+12=0$$

$$(t-3)(t-4)=0$$

よって $t=3, 4$

すなわち $x^2=3$ または $x^2=4$

したがって $x=\pm\sqrt{3}, \pm 2$

(2) $x^2-5x=t$ とおくと、方程式は次のようになる。

$$t^2+10t+24=0$$

$$(t+4)(t+6)=0$$

よって $t=-4, -6$

すなわち $x^2-5x=-4$ または $x^2-5x=-6$

$x^2-5x=-4$ から $x^2-5x+4=0$

$$(x-1)(x-4)=0$$

したがって $x=1, 4$

$x^2-5x=-6$ から $x^2-5x+6=0$

$$(x-2)(x-3)=0$$

したがって $x=2, 3$

答 $x=1, 2, 3, 4$

4

解説

a, b は $x^2-8x+3=0$ の解であるから

$$a^2-8a+3=0, b^2-8b+3=0$$

したがって $a^2-8a=-3, b^2-8b=-3$

よって $(a^2-8a)(b^2-8b+2)=(a^2-8a)\{(b^2-8b)+2\}$
 $=(-3)\times\{(-3)+2\}$
 $=(-3)\times(-1)=3$

5

解説

2 次方程式 $2x^2+ax-b=0$ が 3 を解にもつから

$$2\times 3^2+a\times 3-b=0$$

すなわち $18+3a-b=0$ …… ①

また、 -5 を解にもつから

$$2\times (-5)^2+a\times (-5)-b=0$$

すなわち $50-5a-b=0$ …… ②

①, ② を解いて $a=4, b=30$ 答

別解 解と係数の関係により

$$3+(-5)=-\frac{a}{2}, \quad 3\times(-5)=-\frac{b}{2}$$

よって $a=4, b=30$ 答

6

解説

(1) x の 2 次方程式 $x^2+5x-m-1=0$ …… ① の判別式を D とすると

$$D=5^2-4\times 1\times (-m-1)=29+4m$$

① の実数解の個数が 2 個となるのは、 $D>0$ のときである。

よって $29+4m>0$

これを解くと $m>-\frac{29}{4}$ 答

(2) x の 2 次方程式 $x^2+(a-2)x+a-2=0$ …… ② の判別式を D とすると

$$D=(a-2)^2-4\times 1\times (a-2)=a^2-8a+12$$

② の実数解の個数が 1 個となるのは、 $D=0$ のときである。

よって $a^2-8a+12=0$

左辺を因数分解すると $(a-2)(a-6)=0$

したがって $a=2$ または $a=6$

$a=2$ のとき、2 次方程式は $x^2=0$ よって $x=0$

$a=6$ のとき、2 次方程式は $x^2+4x+4=0$

$$(x+2)^2=0 \quad \text{よって} \quad x=-2$$

答 $a=2$ のとき $x=0, a=6$ のとき $x=-2$

7

(解説)

- (1) 〔証明〕 $\triangle AEG$ において、点 D, F はそれぞれ辺 AE, AG の中点であるから、中点連結定理により

$$DF \parallel EG \quad \cdots \cdots ①, \quad DF = \frac{1}{2} EG \quad \cdots \cdots ②$$

$\triangle CFD$ と線分 GH について、① から $GH \parallel FD$

また、点 G は辺 CF の中点である。

よって、中点連結定理の逆により、点 H は線分 DC の中点である。 〔終〕

- (2) $\triangle CFD$ において、点 G, H はそれぞれ辺 CF, CD の中点であるから、中点連結定理により

$$GH = \frac{1}{2} DF$$

$$\text{すなわち} \quad DF = 2GH$$

$$\text{よって} \quad DF = 2 \text{ cm}$$

$$\text{② から} \quad EG = 2DF = 4$$

$$\text{よって} \quad EH = EG - HG = 4 - 1 = 3 \text{ (cm)}$$

$\triangle DBC$ において、点 E, H はそれぞれ辺 DB, DC の中点であるから、中点連結定理により

$$EH = \frac{1}{2} BC$$

$$\text{すなわち} \quad BC = 2EH$$

$$\text{よって} \quad BC = 6 \text{ cm}$$

8

(解説)

$\triangle ABC$ において、中点連結定理により

$$MP \parallel BC, \quad MP = \frac{1}{2} BC$$

$\triangle DBC$ において、中点連結定理により

$$QN \parallel BC, \quad QN = \frac{1}{2} BC$$

したがって $MP \parallel QN, \quad MP = QN$

よって、1 組の対辺が平行で等しいから、四角形 MPNQ は平行四辺形である。

9

(解説)

3 点 P, H, F を通る平面と辺 AB の交点を Q とし、EA, FQ, HP の延長の交点を O とする。

三角錐 OEFH と三角錐 OAQP は相似で、相似比は

$$EH : AP = AD : AP = 3 : 1$$

よって、体積比は $3^3 : 1^3 = 27 : 1$

立方体を切ってできる、頂点 A を含む方の立体は、

三角錐 OEFH から三角錐 OAQP を取り除いたものである。

よって、その体積を V 、三角錐 OAQP の体積を V' とすると

$$V : V' = (27 - 1) : 1 = 26 : 1 \quad \cdots \cdots ①$$

ここで、 $AP \parallel EH$ であるから $OA : OE = AP : EH$

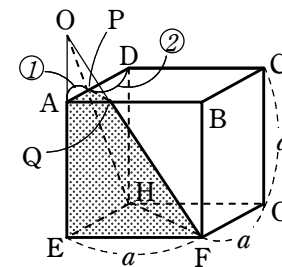
立方体の 1 辺の長さを a とすると $OA : (OA + a) = 1 : 3$

$$\text{よって} \quad OA = \frac{1}{2} a$$

$$\text{三角錐 OAQP の体積は} \quad V' = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} a \times \frac{1}{3} a \right) \times \frac{1}{2} a = \frac{1}{108} a^3$$

$$\text{① から} \quad V = 26 \times V' = \frac{13}{54} a^3$$

$$\text{立方体の体積は } a^3 \text{ であるから} \quad \frac{13}{54} a^3 \div a^3 = \frac{13}{54} \quad \text{答} \quad \frac{13}{54} \text{ 倍}$$



10

(解説)

$\triangle ABC$ の面積を S とする。

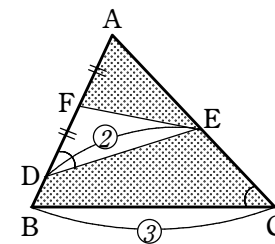
$\triangle ABC \sim \triangle AED$ であり、相似比は

$$BC : ED = 3 : 2$$

よって、面積比は

$$\triangle ABC : \triangle AED = 3^2 : 2^2 = 9 : 4$$

$$\text{したがって} \quad \triangle AED = \frac{4}{9} S$$



よって (四角形 DBCE の面積) = $\triangle ABC - \triangle AED$

$$= S - \frac{4}{9}S = \frac{5}{9}S$$

また $\triangle AFE : \triangle AED = AF : AD = 1 : (1+1) = 1 : 2$

ゆえに $\triangle AFE = \frac{1}{2} \triangle AED = \frac{1}{2} \times \frac{4}{9}S = \frac{2}{9}S$

したがって $\frac{2}{9}S \div \frac{5}{9}S = \frac{2}{9} \times \frac{9}{5} = \frac{2}{5}$ 図 $\frac{2}{5}$ 倍

11

解説

証明 $\triangle ABC$ と $\triangle DBA$ において

$\angle ACB = \angle DAB$, $\angle ABC = \angle DBA$ であるから

$\triangle ABC \sim \triangle DBA$

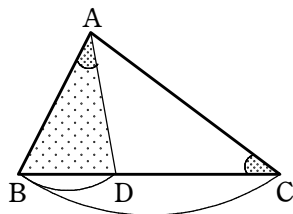
相似比は $AC : AD$ に等しいから

$$\triangle ABC : \triangle DBA = AC^2 : AD^2 \dots\dots ①$$

$\triangle ABC$ と $\triangle DBA$ は高さが等しいから

$$\triangle ABC : \triangle DBA = BC : BD \dots\dots ②$$

①, ② から $AC^2 : AD^2 = BC : BD$ 終



12

解説

1) 証明 $\triangle ABG$ と $\triangle BDG$ において $AD \parallel BC$

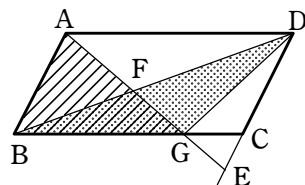
であるから

$$\triangle ABG = \triangle BDG$$

また $\triangle FAB = \triangle ABG - \triangle FBG$

$$\triangle FDG = \triangle BDG - \triangle FBG$$

よって $\triangle FAB = \triangle FDG$ 終



(2) 証明 $AB \parallel DE$ であるから

$$\triangle FAB \sim \triangle FED$$

相似比は $BF : FD$ に等しいから

$$\triangle FAB : \triangle FED = BF^2 : FD^2$$

(1) より, $\triangle FAB = \triangle FDG$ であるから

$$\triangle FDG : \triangle FED = BF^2 : FD^2 \dots\dots ①$$

$\triangle FDG$ と $\triangle FED$ は高さが等しいから

$$\triangle FDG : \triangle FED = FG : FE \dots\dots ②$$

①, ② から $BF^2 : FD^2 = FG : FE$ 終

