【定期試験対策講習】

１学期
期末考査
対策教材①

中３甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｔ「図形と方程式」円の応用，軌跡と領域

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しを
してください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

2 円 $x^2+y^2-4x-5=0$，$x^2+y^2+2y-15=0$ について

(1)　2 円は 2 点で交わることを示せ。

(2)　2 円の 2 つの交点と原点を通る円の方程式を求めよ。

(3)　2 円の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

$\boxed{2}$

座標平面上に 2 点 A$(3,\ 4)$，B$(-2,\ -6)$ および円 C ：$x^2-2x+y^2+4y-12=0$がある。円 C の周上を動く点 P を考える。△ABP の重心の軌跡を求めよ。

$\boxed{3}$

方程式 $x^2+y^2-4kx+(6k-2)y+14k^2-8k+1=0$ が円を表すとき

(1)　定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　k の値がこの範囲で変化するとき，円の中心の軌跡を求めよ。

$\boxed{4}$

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=m(x-1)$ は異なる 2 点 P，Q で交わっている。

(1)　定数 m の値の範囲を求めよ。

(2)　m の値が変化するとき，線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ。

$\boxed{5}$

m が実数全体を動くとき，次の 2 直線の交点 P はどんな図形を描くか。

$$mx-y=0 \ \cdots\cdots ①, \qquad x+my-m-2=0 \ \cdots\cdots ②$$

$\boxed{6}$

$x^2+y^2\leqq 1$，$x\geqq 0$ のとき，$-2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{7}$

次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$(x+y-2)(y-x^2)>0$

(2)　$(x^2+y^2-4)(x^2+y^2+4x-5)\leqq 0$

$\boxed{8}$

a がすべての実数値をとって変化するとき，直線

$$y=2ax-a^2+1 \quad \cdots\cdots ①$$

が通りうる点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図示せよ。

$\boxed{9}$

座標平面上の点 P$(x,\ y)$ が $3y\leqq x+11$，$x+y-5\geqq 0$，$y\geqq 3x-7$ の範囲を動くとき，x^2+y^2-4y の最大値と最小値を求めよ。

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答　(1)　略　　(2)　$x^2+y^2-6x-y=0$　　(3)　$2x+y-5=0$

$\boxed{2}$

解答　円 $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{17}{9}$　ただし，2 点 $\left(-\frac{1}{5},\ -\frac{12}{5}\right)$，$(1,\ 0)$ は除く

$\boxed{3}$

解答　(1)　$0<k<2$　　(2)　直線 $y=-\frac{3}{2}x+1$ $(0<x<4)$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$m<0$，$4<m$　　(2)　放物線 $y=2x^2-2x$ の $x<0$，$2<x$ の部分

$\boxed{5}$

解答　円 $(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$　ただし，点 $(0,\ 1)$ を除く

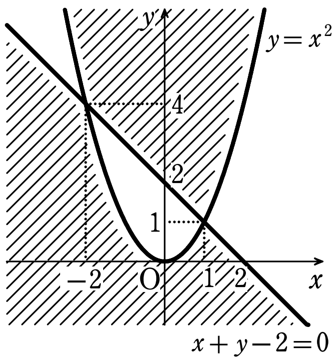
$\boxed{6}$

解答　$x=0$，$y=1$ のとき最大値 1，　$x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$y=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ のとき最小値 $-\sqrt{5}$

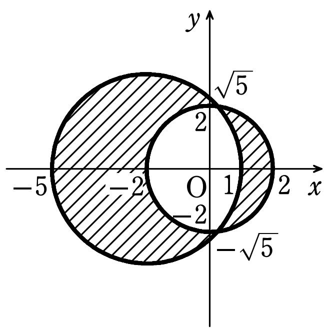
$\boxed{7}$

解答　(1)　［図］境界線を含まない　　(2)　［図］境界線を含む

(1)

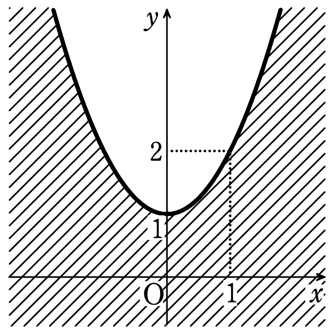


(2)



$\boxed{8}$

解答　［図］境界線を含む



$\boxed{9}$

解答　$x=4$，$y=5$ のとき最大値 21；$x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{7}{2}$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$

$\boxed{1}$

解説

(1)　$x^2+y^2-4x-5=0$ を変形すると　　$(x-2)^2+y^2=3^2$

この円の中心は点 $(2,\ 0)$，半径は 3

$x^2+y^2+2y-15=0$ を変形すると　　$x^2+(y+1)^2=4^2$

この円の中心は点 $(0,\ -1)$，半径は 4

よって，2 円の中心間の距離 d は

$$d=\sqrt{(0-2)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{5}$$

$4-3<d<4+3$ であるから，2 円は 2 点で交わる。

(2)　k を定数として，方程式

$$k(x^2+y^2-4x-5)+(x^2+y^2+2y-15)=0\quad\cdots\cdots①$$

を考えると，① の表す図形は 2 円の 2 つの交点を通る。

図形 ① が原点を通るとき　　$-5k-15=0$　　　よって　　$k=-3$

これを ① に代入して整理すると　　$x^2+y^2-6x-y=0$

これが求める円の方程式である。

(3)　図形 ① が直線であるとき，x^2，y^2 の項の係数が 0 になるから　　$k=-1$

これを ① に代入して整理すると　$2x+y-5=0$

$\boxed{2}$

(解説)

直線 AB の方程式は　$y-4=\dfrac{-6-4}{-2-3}(x-3)$　すなわち　$y=2x-2$　…… ①

円 C の方程式を変形すると　$(x-1)^2+(y+2)^2=17$　…… ②

点 P の座標を $(s,\ t)$ とする。

3 点 A，B，P が同じ直線上にないとき，△ABP の重心 G の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{3-2+s}{3},\quad y=\frac{4-6+t}{3}$$

すなわち　$x=\dfrac{s+1}{3}$，$y=\dfrac{t-2}{3}$　…… ③

点 P は円 C の周上を動くから，② より

$$(s-1)^2+(t+2)^2=17 \quad \cdots\cdots ④$$

③ から　$s=3x-1$，$t=3y+2$

④ に代入して　$(3x-2)^2+(3y+4)^2=17$

したがって　$\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{17}{9}$

3 点 A，B，P が同じ直線上にあるとき，点 P は直線 AB と円 C の交点である。

①，② から　$5x^2-2x-16=0$

ゆえに　$(5x+8)(x-2)=0$　　よって　$x=-\dfrac{8}{5}$，2

したがって，直線 AB と円 C の交点となるような点 P $(s,\ t)$ は，

① から　$(s,\ t)=\left(-\dfrac{8}{5},\ -\dfrac{26}{5}\right)$，$(2,\ 2)$

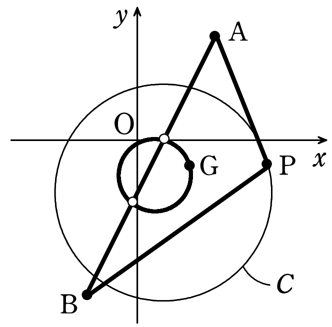
このとき，③ から，それぞれ

$$(x,\ y)=\left(-\frac{1}{5},\ -\frac{12}{5}\right),\ (1,\ 0)$$

この 2 点は，求める軌跡から除くことになる。

以上から，求める軌跡は，円 $\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{17}{9}$

ただし，2 点 $\left(-\dfrac{1}{5},\ -\dfrac{12}{5}\right)$，$(1,\ 0)$ は除く。



$\boxed{3}$

(解説)

(1)　方程式を変形して

$$(x-2k)^2+\{y+(3k-1)\}^2=-k^2+2k$$

これが円を表すための条件は　$-k^2+2k>0$

よって　$k(k-2)<0$　　したがって　$0<k<2$

(2)　円の中心の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=2k,\quad y=-3k+1\ (0<k<2)$$

k を消去すると　$y=-\dfrac{3}{2}x+1$

また，$0<k<2$ であるから　$0<2k<4$　すなわち　$0<x<4$

よって，求める軌跡は　直線 $y=-\dfrac{3}{2}x+1\ (0<x<4)$

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　$y=x^2$ …… ①，　$y=m(x-1)$ …… ②　とする。

①，② から y を消去して整理すると　$x^2-mx+m=0$　…… ③

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-m)^2-4m=m(m-4)$$

放物線 ① と直線 ② が異なる 2 点 P，Q で交わるための必要十分条件は

$D>0$　すなわち　$m(m-4)>0$

よって　$m<0,\ 4<m$ ……④

(2) P，Q の x 座標を，それぞれ α，β ($\alpha \neq \beta$) とする。

α，β は③の異なる2つの実数解であるから，解と係数の関係により　$\alpha+\beta=m$

線分 PQ の中点 M の座標を $(X,\ Y)$ とすると

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m}{2} \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$Y=m(X-1) \quad \cdots\cdots ⑥$$

⑤から　$m=2X$ ……⑦

これを⑥に代入して　$Y=2X(X-1)$　よって　$Y=2X^2-2X$

また，④，⑦から　$2X<0,\ 4<2X$　ゆえに　$X<0,\ 2<X$

よって，点 M は放物線 $y=2x^2-2x$ の $x<0,\ 2<x$ の部分にある。

逆に，この図形上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点 M の軌跡は　放物線 $y=2x^2-2x$ の $x<0,\ 2<x$ の部分

$\boxed{5}$

解説

P の座標を $(x,\ y)$ とすると，x，y は①，②を同時に満たす。

[1] $x \neq 0$ のとき

①から　$m=\dfrac{y}{x}$　②に代入して　$x+\dfrac{y^2}{x}-\dfrac{y}{x}-2=0$

分母を払って　$x^2+y^2-2x-y=0$ ……③

すなわち　$(x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

③において，$x=0$ とすると　$y=0,\ 1$

ゆえに，$x \neq 0$ のとき，点 P は円③から2点 $(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を除いた図形上にある。

[2] $x=0$ のとき　①から　$y=0$

$x=0$，$y=0$ を②に代入すると　$m=-2$

よって，点 $(0,\ 0)$ は $m=-2$ のときの2直線の交点である。

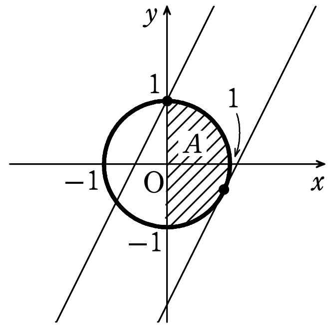
以上から，求める図形は，

円 $(x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$　ただし，点 $(0,\ 1)$ を除く。

$\boxed{6}$

解説

与えられた連立不等式の表す領域 A は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



$-2x+y=k$ ……① とおくと，①は傾きが2，y 切片が k の直線を表す。

図から，直線①が点 $(0,\ 1)$ を通るとき，k の値は最大となる。

このとき　$k=-2\cdot 0+1=1$

また，直線①が領域 A 上で円 $x^2+y^2=1$ に接するとき，k の値は最小となる。

①から　$y=2x+k$ ……②

これを $x^2+y^2=1$ に代入して　$x^2+(2x+k)^2=1$

よって　$5x^2+4kx+k^2-1=0$ ……③

この2次方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-1)=-k^2+5$

直線①と円が接するとき，$D=0$ であるから　$-k^2+5=0$

ゆえに　$k=\pm\sqrt{5}$　接点が領域 A 上にあるとき　$k=-\sqrt{5}$

このとき，③から　$x=-\dfrac{2k}{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

②から　$y=2\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{5}+k=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

よって　$x=0$，$y=1$ のとき最大値 1，　$x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$y=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ のとき最小値 $-\sqrt{5}$

$\boxed{7}$

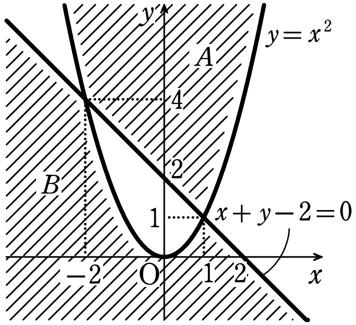
(解説)

(1)　与えられた不等式から

①　$\begin{cases} x+y-2>0 \\ y-x^2>0 \end{cases}$　または　②　$\begin{cases} x+y-2<0 \\ y-x^2<0 \end{cases}$

求める領域は，① の表す領域 A と，② の表す領域 B の和集合 $A\cup B$ で，図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。



(2)　与えられた不等式を変形すると

$$(x^2+y^2-4)\{(x+2)^2+y^2-9\}\leqq 0$$

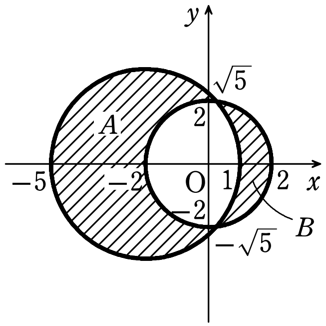
よって

①　$\begin{cases} x^2+y^2-4\geqq 0 \\ (x+2)^2+y^2-9\leqq 0 \end{cases}$　または

②　$\begin{cases} x^2+y^2-4\leqq 0 \\ (x+2)^2+y^2-9\geqq 0 \end{cases}$

求める領域は，① の表す領域 A と，② の表す領域 B の和集合 $A\cup B$ で，図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。



$\boxed{8}$

(解説)

① を a について整理すると　　$a^2-2xa+y-1=0$　……②

直線 ① が点 $(x,\ y)$ を通るための必要十分条件は，② を満たす実数 a が存在することである。

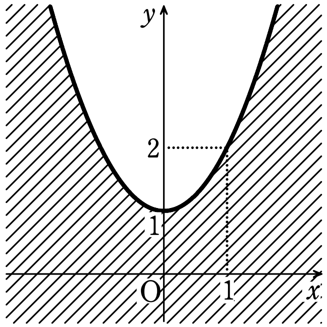
よって，a の 2 次方程式 ② の判別式 D について

$$D\geqq 0$$

ここで　　$\dfrac{D}{4}=(-x)^2-(y-1)=x^2-y+1$

ゆえに　　$x^2-y+1\geqq 0$　　　よって　　$y\leqq x^2+1$

したがって，点 $(x,\ y)$ の存在範囲は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



$\boxed{9}$

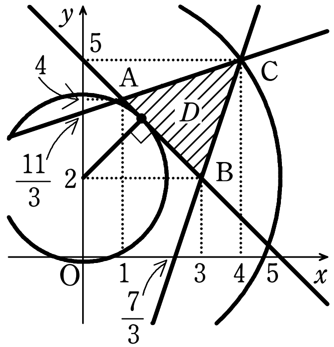
(解説)

与えられた連立不等式の表す領域 D は，3 点 A$(1,\ 4)$，B$(3,\ 2)$，C$(4,\ 5)$ を頂点とする三角形の周および内部である。

$x^2+y^2-4y=k$ とおくと

$x^2+(y-2)^2=k+4$　……①

$k+4>0$ のとき，① は点 $(0,\ 2)$ を中心とする半径 $\sqrt{k+4}$ の円を表す。この円 ① が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。



図から，円 ① が C$(4,\ 5)$ を通るとき，k は最大で

$$k=4^2+(5-2)^2-4=21$$

また，図から 円 ① が直線 AB：$x+y-5=0$　……② に接するとき，k が最小になる。

接点の座標は，円 ① の中心 $(0,\ 2)$ を通り直線 ② に垂直な直線 $y=x+2$ と直線 ② の交点であるから　$(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$

円 ① がこの点を通るとき，k は最小で

$$k=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}-2\right)^2-4=\frac{1}{2}$$

したがって　$x=4,\ y=5$ のとき最大値 21，

$x=\dfrac{3}{2},\ y=\dfrac{7}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{2}$