

【定期試験対策講習】

1 学期 期末 対策教材②

中 3 甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学 Y「複素数と方程式」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しを
してください。

【問題】

1

2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき、次の式の値を求めよ。

- (1) $\alpha^4 + \beta^4$ (2) $\alpha^5 + \beta^5$ (3) $|\alpha - \beta|$

2

2 次方程式 $x^2 - px + 2 = 0$ の 2 つの解の和と積を 2 つの解にもつ 2 次方程式が

$x^2 - 5x + q = 0$ であるという。定数 p, q の値を求めよ。

3

x の方程式 $(1-i)x^2 + (3k-6i)x + 8-5ki + 2i = 0$ が実数解をもつような整数 k の値は

$\sqrt{\quad}$ である。また、そのときの実数解は $x = \sqrt[4]{\quad}$ である。

4

整式 $P(x)$ を $x^2 + x - 2$ で割ると余りが $-3x + 8$ であり、 $x^2 - x - 6$ で割ると余りが $-5x + 4$ である。 $P(x)$ を $x^2 - 4x + 3$ で割ったときの余りを求めよ。

5

3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 10 = 0$ が $2+i$ を解にもつとき、実数の定数 a, b の値を求めよ。また、他の解を求めよ。

6

(1) 1 の 3 乗根を求めよ。

(2) 1 の 3 乗根のうち、虚数であるものの 1 つを ω とする。

(ア) ω^2 も 1 の 3 乗根であることを示せ。

(イ) $\omega^7 + \omega^8, \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + 1, (\omega + 2\omega^2)^2 + (2\omega + \omega^2)^2$ の値をそれぞれ求めよ。

7

3 次方程式 $x^3 - 2x^2 + x + 3 = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき、次の式の値を求めよ。

- (1) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ (2) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

(3) $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$

8

$x^2 + xy - 6y^2 - x + 7y + k$ が x, y の 1 次式の積に因数分解できるように、定数 k の値を定めよ。また、このとき、与式を因数分解せよ。

9

(1) $t = x + \frac{1}{x}$ とおく。 x の 4 次方程式 $2x^4 - 9x^3 - x^2 - 9x + 2 = 0$ から t の 2 次方程式を導け。

(2) (1) を利用して、方程式 $2x^4 - 9x^3 - x^2 - 9x + 2 = 0$ を解け。

【解答&解説】

1

【解答】 (1) 7 (2) 11 (3) $\sqrt{5}$

2

【解答】 $p=3, q=6$

3

【解答】 (ア) 2 (イ) $-2, -4$

4

【解答】 $-8x+13$

5

【解答】 $a=-6, b=13$, 他の解は $2, 2-i$

6

【解答】 (1) $1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(2) (ア) 略

(イ) $\omega^7 + \omega^8 = -1, \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + 1 = 0, (\omega + 2\omega^2)^2 + (2\omega + \omega^2)^2 = 3$

7

【解答】 (1) 2 (2) -7 (3) 5

8

【解答】 $k=-2, (x-2y+1)(x+3y-2)$

9

【解答】 (1) $2t^2-9t-5=0$ (2) $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4}$

1

【解説】

解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$$

$$(1) \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2$$

$$\text{ここで} \quad \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1^2 - 2 \cdot (-1) = 3$$

$$\text{よって} \quad \alpha^4 + \beta^4 = 3^2 - 2 \cdot (-1)^2 = 7$$

$$(2) \alpha^5 + \beta^5 = (\alpha^4 + \beta^4)(\alpha + \beta) - \alpha^4\beta - \alpha\beta^4 = (\alpha^4 + \beta^4)(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^3 + \beta^3)$$

$$\text{ここで} \quad \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 1^3 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 = 4$$

$$\text{よって} \quad \alpha^5 + \beta^5 = 7 \cdot 1 - (-1) \cdot 4 = 11$$

$$(3) |\alpha - \beta|^2 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1^2 - 4 \cdot (-1) = 5$$

$$\text{よって} \quad |\alpha - \beta| = \sqrt{5}$$

2

【解説】

$x^2 - px + 2 = 0$ の2つの解を α, β とすると, 解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = p \quad \cdots \cdots \text{①}, \quad \alpha\beta = 2 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$x^2 - 5x + q = 0$ の2つの解が $\alpha + \beta, \alpha\beta$ であるから, 解と係数の関係により

$$(\alpha + \beta) + \alpha\beta = 5, \quad (\alpha + \beta)\alpha\beta = q$$

これらに ①, ② を代入すると

$$p + 2 = 5 \quad \cdots \cdots \text{③}, \quad p \cdot 2 = q \quad \cdots \cdots \text{④}$$

$$\text{③, ④ を解いて} \quad p = 3, q = 6$$

3

【解説】

$$\text{方程式の実数解を} \alpha \text{ とすると} \quad (1-i)\alpha^2 + (3k-6i)\alpha + 8-5ki+2i=0$$

$$i \text{ について整理して} \quad (\alpha^2 + 3k\alpha + 8) + (-\alpha^2 - 6\alpha - 5k + 2)i = 0$$

α は実数であるから, k が整数のとき, $\alpha^2 + 3k\alpha + 8, -\alpha^2 - 6\alpha - 5k + 2$ も実数である。

$$\text{よって} \quad \alpha^2 + 3k\alpha + 8 = 0 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$-\alpha^2 - 6\alpha - 5k + 2 = 0 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{①} + \text{② から} \quad (3k-6)\alpha - 5k + 10 = 0$$

$$\text{すなわち} \quad 3(k-2)\alpha - 5(k-2) = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (3\alpha-5)(k-2) = 0$$

$$\text{よって} \quad \alpha = \frac{5}{3} \text{ または } k = 2$$

[1] $\alpha = \frac{5}{3}$ のとき

① から $\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 3k \cdot \frac{5}{3} + 8 = 0$

これを解くと $k = -\frac{97}{45}$

k は整数であるから、不適。

[2] $k = 2$ のとき

もとの x の方程式は $(1-i)x^2 + (6-6i)x + 8 - 10i + 2i = 0$

すなわち $(1-i)(x^2 + 6x + 8) = 0$

よって $(x+2)(x+4) = 0$

これは、実数解 $x = -2, -4$ をもつから、適する。

したがって、求める整数 k の値は $k = {}^7 2$

また、そのときの実数解は $x = {}^1 -2, -4$

4

解説

$P(x)$ を $x^2 + x - 2, x^2 - x - 6$ すなわち $(x+2)(x-1), (x+2)(x-3)$ で割ったときの商を、それぞれ $Q_1(x), Q_2(x)$ とすると、条件から

$$P(x) = (x+2)(x-1)Q_1(x) - 3x + 8 \quad \cdots \cdots ①$$

$$P(x) = (x+2)(x-3)Q_2(x) - 5x + 4 \quad \cdots \cdots ②$$

$P(x)$ を $x^2 - 4x + 3$ すなわち $(x-1)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$ 、余りを $ax + b$ とすると $P(x) = (x-1)(x-3)Q(x) + ax + b \quad \cdots \cdots ③$

① から $P(1) = -3 \cdot 1 + 8 = 5$

② から $P(3) = -5 \cdot 3 + 4 = -11$

③ から $P(1) = a + b, P(3) = 3a + b$

よって $a + b = 5, 3a + b = -11$ これを解いて $a = -8, b = 13$

ゆえに、求める余りは $-8x + 13$

5

解説

(解1) $2+i$ が解であるから $(2+i)^3 + a(2+i)^2 + b(2+i) - 10 = 0$

整理して $3a + 2b - 8 + (4a + b + 11)i = 0$

$3a + 2b - 8, 4a + b + 11$ は実数であるから

$$3a + 2b - 8 = 0, 4a + b + 11 = 0$$

これを解いて $a = -6, b = 13$

このとき、方程式は $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$

左辺を因数分解すると $(x-2)(x^2 - 4x + 5) = 0$

これを解いて $x = 2, 2 \pm i$

したがって、他の解は $2, 2-i$

(解2) 方程式の係数は実数であるから、 $2+i$ と共役な複素数 $2-i$ も解である。

よって、方程式の左辺は $\{x - (2+i)\}\{x - (2-i)\}$ すなわち $x^2 - 4x + 5$ で割り切れる。

左辺 $x^3 + ax^2 + bx - 10$ を $x^2 - 4x + 5$ で割ると、

$$\text{商は } x + a + 4, \text{ 余りは } (4a + b + 11)x - 5(a + 6) = 0$$

余りが0であるとき $4a + b + 11 = 0, -5(a + 6) = 0$

よって $a = -6, b = 13$

このとき、方程式は $(x^2 - 4x + 5)(x - 2) = 0$ これを解いて $x = 2, 2 \pm i$

したがって、他の解は $2, 2-i$

参考 「3次方程式の解と係数の関係」を利用して、次のように解くこともできる。

方程式の係数は実数であるから、 $2+i$ と共役な複素数 $2-i$ も解である。

もう1つの解を p とすると、解と係数の関係により

$$p + (2+i) + (2-i) = -a$$

$$(2+i)p + (2-i)p + (2+i)(2-i) = b$$

$$(2+i)(2-i)p = 10$$

これを解いて $p = 2, a = -6, b = 13$

したがって、他の解は $2, 2-i$

6

解説

(1) x を1の3乗根とすると $x^3 = 1$

ゆえに $x^3 - 1 = 0$ よって $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

したがって $x - 1 = 0$ または $x^2 + x + 1 = 0$

これを解いて、1の3乗根は $1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(2) (ア) $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とすると

$$\omega^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\omega = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ とすると}$$

$$\omega^2 = \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{3}i + 3i^2}{4} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

よって、 ω^2 も1の3乗根である。

(イ) ω は方程式 $x^2 + x + 1 = 0$, $x^3 = 1$ の解であるから

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0, \quad \omega^3 = 1$$

$$\text{よって} \quad \omega^7 + \omega^8 = (\omega^3)^2 \cdot \omega + (\omega^3)^2 \cdot \omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$$

$$\text{また} \quad \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + 1 = \frac{\omega + 1 + \omega^2}{\omega^2} = 0$$

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0 \text{ から, } \omega^2 = -\omega - 1 \text{ となり}$$

$$\begin{aligned} (\omega + 2\omega^2)^2 + (2\omega + \omega^2)^2 &= \{\omega + 2(-\omega - 1)\}^2 + (2\omega - \omega - 1)^2 \\ &= (-\omega - 2)^2 + (\omega - 1)^2 \\ &= 2\omega^2 + 2\omega + 5 \\ &= 2(-\omega - 1) + 2\omega + 5 = 3 \end{aligned}$$

7

解説

解と係数の関係から

$$\alpha + \beta + \gamma = 2, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1, \quad \alpha\beta\gamma = -3$$

$$(1) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 2^2 - 2 \cdot 1 = 2$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma \\ &= 2(2 - 1) + 3 \cdot (-3) = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \alpha + \beta + \gamma &= 2 \text{ から} \quad \alpha + \beta = 2 - \gamma, \quad \beta + \gamma = 2 - \alpha, \quad \gamma + \alpha = 2 - \beta \\ \text{よって} \quad (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) &= (2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) \end{aligned}$$

また、 $x^3 - 2x^2 + x + 3 = 0$ の3つの解が α, β, γ であるから

$$x^3 - 2x^2 + x + 3 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

この両辺に $x = 2$ を代入すると $2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 + 3 = (2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma)$

$$\text{ゆえに} \quad (2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) = 5$$

$$\text{したがって} \quad (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = 5$$

$$\begin{aligned} \text{別解} \quad (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) &= (2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) \\ &= 8 - 4(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma \\ &= 8 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - (-3) = 5 \end{aligned}$$

8

解説

$$x^2 + xy - 6y^2 - x + 7y + k = 0 \text{ とおく。}$$

$$x \text{ について整理すると} \quad x^2 + (y - 1)x - 6y^2 + 7y + k = 0$$

これを x の2次方程式とみて解くと

$$x = \frac{-(y - 1) \pm \sqrt{(y - 1)^2 - 4(-6y^2 + 7y + k)}}{2} = \frac{-y + 1 \pm \sqrt{25y^2 - 30y - 4k + 1}}{2}$$

x が y についての1次式で表されるためには、根号内が y についての完全平方式になればよい。

すなわち、 $25y^2 - 30y - 4k + 1 = 0$ の判別式を D とすると、 $D = 0$ が成り立てばよい。

$$\text{ここで} \quad \frac{D}{4} = (-15)^2 - 25(-4k + 1) = 100(k + 2)$$

$$\text{よって} \quad 100(k + 2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = -2$$

このとき、根号内は $(5y - 3)^2$ で

$$x = \frac{-y + 1 \pm |5y - 3|}{2} = \frac{-y + 1 \pm (5y - 3)}{2}$$

$$\text{よって} \quad x = 2y - 1, \quad -3y + 2$$

$$\text{ゆえに} \quad \text{与式} = \{x - (2y - 1)\}\{x - (-3y + 2)\} = (x - 2y + 1)(x + 3y - 2)$$

9

解説

(1) $x = 0$ は解ではないから、方程式の両辺を x^2 で割ると

$$2x^2 - 9x - 1 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\text{よって } 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2 \text{ であるから } 2(t^2 - 2) - 9t - 1 = 0$$

$$\text{ゆえに } 2t^2 - 9t - 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(2) \textcircled{1} \text{ から } (t-5)(2t+1)=0 \quad \text{よって } t=5, -\frac{1}{2}$$

$$[1] \quad t=5 \text{ のとき } x + \frac{1}{x} = 5$$

$$\text{両辺に } x \text{ を掛けて整理すると } x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\text{これを解くと } x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$[2] \quad t = -\frac{1}{2} \text{ のとき } x + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{両辺に } 2x \text{ を掛けて整理すると } 2x^2 + x + 2 = 0$$

$$\text{これを解くと } x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4}$$

$$\text{したがって、解は } x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4}$$