【定期試験対策講習】

１学期
期末考査
対策教材②

中３甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｙ「複素数と方程式」
数学Ｔ「軌跡と領域」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

2乗すると $2+2\sqrt{3}\,i$ になる複素数 z を求めよ。

$\boxed{2}$

2次方程式 $x^2-x-1=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^4+\beta^4$　　(2) $\alpha^5+\beta^5$　　(3) $|\alpha-\beta|$

$\boxed{3}$

2次方程式 $x^2-px+2=0$ の2つの解の和と積を2つの解にもつ2次方程式が $x^2-5x+q=0$ であるという。定数 p，q の値を求めよ。

$\boxed{4}$

x の方程式 $(1-i)x^2+(3k-6i)x+8-5ki+2i=0$ が実数解をもつような整数 k の値は $^{ア}\boxed{}$ である。また，そのときの実数解は $x={}^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{5}$

整式 $P(x)$ を x^2+x-2 で割ると余りが $-3x+8$ であり，x^2-x-6 で割ると余りが $-5x+4$ である。$P(x)$ を x^2-4x+3 で割ったときの余りを求めよ。

$\boxed{6}$

$x^2+xy-6y^2-x+7y+k$ が x，y の1次式の積に因数分解できるように，定数 k の値を定めよ。また，このとき，与式を因数分解せよ。

$\boxed{7}$

次の式を因数分解せよ。

(1) x^3-x^2-4　　(2) x^4-4x+3　　(3) $12x^3-5x^2+1$

$\boxed{8}$

2直線 $4x+3y-8=0$，$5y+3=0$ のなす角の二等分線の方程式を求めよ。

$\boxed{9}$

長さが2の線分ABを1辺とする三角形PABの頂点Pが，等式 $\mathrm{AP}^2-\mathrm{BP}^2=2$ を満たしながら動くとき，点Pの軌跡を求めよ。

$\boxed{10}$

$x^2+y^2\leqq 5$ が $2x+y\geqq k$ の十分条件となる定数 k の値の範囲を求めよ。

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答　$z=\sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}-i$

$\boxed{2}$

解答　(1)　7　　(2)　11　　(3)　$\sqrt{5}$

$\boxed{3}$

解答　$p=3,\ q=6$

$\boxed{4}$

解答　(ア)　2　　(イ)　$-2,\ -4$

$\boxed{5}$

解答　$-8x+13$

$\boxed{6}$

解答　$k=-2,\ (x-2y+1)(x+3y-2)$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$(x-2)(x^2+x+2)$　　(2)　$(x-1)^2(x^2+2x+3)$　　(3)　$(3x+1)(4x^2-3x+1)$

$\boxed{8}$

解答　$4x-2y-11=0,\ 4x+8y-5=0$

$\boxed{9}$

解答　線分 AB を 3：1 に内分する点を C とすると，点 C を通り直線 AB に垂直な直線。ただし，点 C は除く

$\boxed{10}$

解答　$k\leqq -5$

$\boxed{1}$

解説

$z=a+bi$ (a，b は実数) とする。

$(a+bi)^2=2+2\sqrt{3}\,i$ から　　$a^2-b^2+2abi=2+2\sqrt{3}\,i$

a，b は実数であるから，a^2-b^2 と $2ab$ も実数である。

よって　　$a^2-b^2=2$　……①，　$ab=\sqrt{3}$　……②

① から　　$a^2=b^2+2$　……③　　② から　　$a^2b^2=3$　……④

③ を ④ に代入して　　$(b^2+2)b^2=3$

整理して　　$b^4+2b^2-3=0$　　ゆえに　　$(b^2-1)(b^2+3)=0$

b は実数であるから　　$b^2+3>0$　　よって　　$b^2-1=0$

これを解いて　　$b=\pm 1$

② から　　$b=1$ のとき　$a=\sqrt{3}$　　$b=-1$ のとき　$a=-\sqrt{3}$

したがって　　$z=\sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}-i$

$\boxed{2}$

解説

解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$$

(1)　$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2$

ここで　　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot(-1)=3$

よって　　$\alpha^4+\beta^4=3^2-2\cdot(-1)^2=7$

(2)　$\alpha^5+\beta^5=(\alpha^4+\beta^4)(\alpha+\beta)-\alpha^4\beta-\alpha\beta^4=(\alpha^4+\beta^4)(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\alpha^3+\beta^3)$

ここで　　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1^3-3\cdot(-1)\cdot 1=4$

よって　　$\alpha^5+\beta^5=7\cdot 1-(-1)\cdot 4=11$

(3)　$|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1^2-4\cdot(-1)=5$

よって　　$|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$

$\boxed{3}$

解説

$x^2-px+2=0$ の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=p\ \ \cdots\cdots ①,\quad \alpha\beta=2\ \ \cdots\cdots ②$$

$x^2-5x+q=0$ の 2 つの解が $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ であるから，解と係数の関係により

$$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=5,\quad (\alpha+\beta)\alpha\beta=q$$

これらに ①，② を代入すると

$$p+2=5\ \ \cdots\cdots ③,\quad p\cdot 2=q\ \ \cdots\cdots ④$$

③，④ を解いて　　$p=3,\ q=6$

$\boxed{4}$

(解説)

方程式の実数解を α とすると　$(1-i)\alpha^2+(3k-6i)\alpha+8-5ki+2i=0$

i について整理して　$(\alpha^2+3k\alpha+8)+(-\alpha^2-6\alpha-5k+2)i=0$

α は実数であるから，k が整数のとき，$\alpha^2+3k\alpha+8$，$-\alpha^2-6\alpha-5k+2$ も実数である。

よって　$\alpha^2+3k\alpha+8=0$　…… ①

$-\alpha^2-6\alpha-5k+2=0$　…… ②

① + ② から　$(3k-6)\alpha-5k+10=0$

すなわち　$3(k-2)\alpha-5(k-2)=0$

ゆえに　$(3\alpha-5)(k-2)=0$

よって　$\alpha=\dfrac{5}{3}$ または $k=2$

[1]　$\alpha=\dfrac{5}{3}$ のとき

① から　$\left(\dfrac{5}{3}\right)^2+3k\cdot\dfrac{5}{3}+8=0$

これを解くと　$k=-\dfrac{97}{45}$

k は整数であるから，不適。

[2]　$k=2$ のとき

もとの x の方程式は　$(1-i)x^2+(6-6i)x+8-10i+2i=0$

すなわち　$(1-i)(x^2+6x+8)=0$

よって　$(x+2)(x+4)=0$

これは，実数解 $x=-2$，-4 をもつから，適する。

したがって，求める整数 k の値は　$k={}^{ア}2$

また，そのときの実数解は　$x={}^{イ}-2$，-4

$\boxed{5}$

(解説)

$P(x)$ を x^2+x-2，x^2-x-6 すなわち $(x+2)(x-1)$，$(x+2)(x-3)$ で割ったときの商を，それぞれ $Q_1(x)$，$Q_2(x)$ とすると，条件から

$P(x)=(x+2)(x-1)Q_1(x)-3x+8$　…… ①

$P(x)=(x+2)(x-3)Q_2(x)-5x+4$　…… ②

$P(x)$ を x^2-4x+3 すなわち $(x-1)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると　$P(x)=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$　…… ③

① から　$P(1)=-3\cdot1+8=5$

② から　$P(3)=-5\cdot3+4=-11$

③ から　$P(1)=a+b$，$P(3)=3a+b$

よって　$a+b=5$，$3a+b=-11$　　これを解いて　$a=-8$，$b=13$

ゆえに，求める余りは　$-8x+13$

$\boxed{6}$

(解説)

$x^2+xy-6y^2-x+7y+k=0$ とおく。

x について整理すると　$x^2+(y-1)x-6y^2+7y+k=0$

これを x の 2 次方程式とみて解くと

$$x=\frac{-(y-1)\pm\sqrt{(y-1)^2-4(-6y^2+7y+k)}}{2}=\frac{-y+1\pm\sqrt{25y^2-30y-4k+1}}{2}$$

x が y についての 1 次式で表されるためには，根号内が y についての完全平方式になればよい。

すなわち，$25y^2-30y-4k+1=0$ の判別式を D とすると，$D=0$ が成り立てばよい。

ここで　$\dfrac{D}{4}=(-15)^2-25(-4k+1)=100(k+2)$

よって　$100(k+2)=0$　　ゆえに　$k=-2$

このとき，根号内は $(5y-3)^2$ で

$$x=\frac{-y+1\pm|5y-3|}{2}=\frac{-y+1\pm(5y-3)}{2}$$

よって　$x=2y-1$，$-3y+2$

ゆえに　与式 $=\{x-(2y-1)\}\{x-(-3y+2)\}=(x-2y+1)(x+3y-2)$

$\boxed{7}$

(解説)

与式を $P(x)$ とする。

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 0 & -4 & 2 \\ & 2 & 2 & 4 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

(1)　$P(2)=2^3-2^2-4=0$ であるから，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

よって　　$P(x)=(x-2)(x^2+x+2)$

(2)　$P(1)=0$ であるから，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & -3 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 & & \end{array}$$

ゆえに　　$P(x)=(x-1)(x^3+x^2+x-3)$

また，$Q(x)=x^3+x^2+x-3$ とすると　　$Q(1)=0$

よって，$Q(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

ゆえに　　$Q(x)=(x-1)(x^2+2x+3)$

したがって　$P(x)=(x-1)^2(x^2+2x+3)$

(3)　$P\left(-\dfrac{1}{3}\right)=0$ であるから，$P(x)$ は $x+\dfrac{1}{3}$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{rrrr|l} 12 & -5 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ & -4 & 3 & -1 & \\ \hline 12 & -9 & 3 & 0 & \end{array}$$

よって　　$P(x)=\left(x+\dfrac{1}{3}\right)(12x^2-9x+3)$

$=(3x+1)(4x^2-3x+1)$

$\boxed{8}$

(解説)

求める二等分線上の点 P$(x,\ y)$ は，2 直線 $4x+3y-8=0$，$5y+3=0$ から等距離にある。

ゆえに　$\dfrac{|4x+3y-8|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|0\cdot x+5y+3|}{\sqrt{0^2+5^2}}$

よって　　$4x+3y-8=\pm(5y+3)$

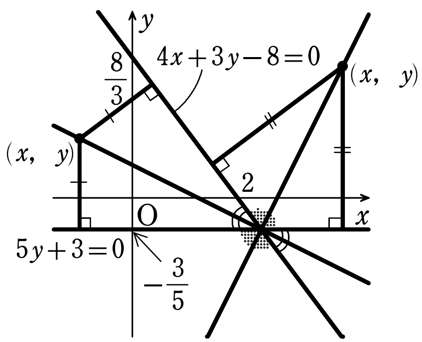
したがって，求める二等分線の方程式は

$4x+3y-8=5y+3$ から

$4x-2y-11=0$

$4x+3y-8=-5y-3$ から

$4x+8y-5=0$



$\boxed{9}$

(解説)

A$(0,\ 0)$，B$(2,\ 0)$ となるように，座標軸を定める。

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

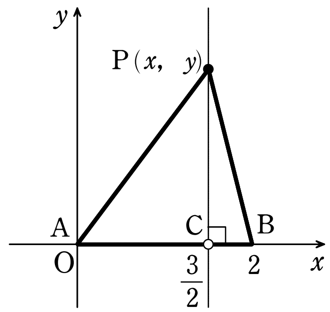
$\mathrm{AP}^2=x^2+y^2$

$\mathrm{BP}^2=(x-2)^2+y^2$

$\mathrm{AP}^2-\mathrm{BP}^2=2$ から　　$x^2+y^2-\{(x-2)^2+y^2\}=2$

整理して　　$4x=6$

ゆえに　　$x=\dfrac{3}{2}$ ……①



ここで，P は △PAB の頂点であるから，直線 AB 上にはない。

よって，直線①から，x 軸上の点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を除く。

したがって，求める軌跡は，線分 AB を 3：1 に内分する点を C とすると，点 C を通り直線 AB に垂直な直線。ただし，点 C は除く。

$\boxed{10}$

(解説)

$P=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqq 5\}$,

$Q=\{(x,\ y)\mid 2x+y\geqq k\}$ とすると

$x^2+y^2\leqq 5 \Longrightarrow 2x+y\geqq k$ が成り立つための条件は

$P\subset Q$

よって，図から

$k<0$　かつ　$\dfrac{|2\cdot 0+0-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}\geqq\sqrt{5}$

ゆえに　　$|-k|\geqq(\sqrt{5})^2$

よって　　$k\leqq -5,\ 5\leqq k$

$k<0$ との共通範囲をとって　　$k\leqq -5$