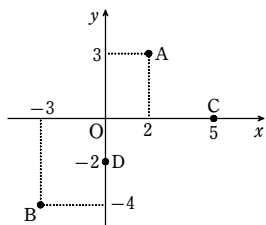
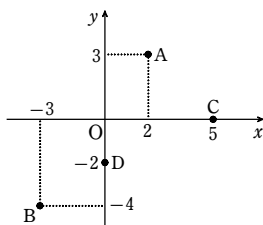


1

解答

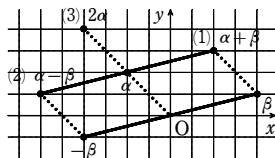


解説

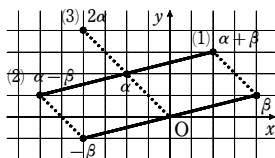


2

解答



解説



3

解答 $a = -\frac{4}{3}$

解説

3点 O, α, β が一直線上にあるとき、 $\beta = k\alpha$ となる実数 k がある。

$$-1 + ai = k(3 + 4i) \text{ から } -1 + ai = 3k + 4ki$$

$$\text{よって } -1 = 3k, a = 4k \quad \text{これを解いて} \quad k = -\frac{1}{3}, a = -\frac{4}{3}$$

4

解答 略

解説

$$z = \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta \text{ とすると}$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \overline{\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta} = \overline{\alpha\bar{\beta}} + \overline{\bar{\alpha}\beta} = \bar{\alpha}\bar{\bar{\beta}} + \bar{\bar{\alpha}}\bar{\beta} \\ &= \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} = \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = z \\ \text{ゆえに、} z \text{ すなわち } \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta &\text{ は実数である。} \\ w &= \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta \text{ とすると、} w \neq 0 \text{ で} \\ \bar{w} &= \overline{\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta} = \overline{\alpha\bar{\beta}} - \overline{\bar{\alpha}\beta} \\ &= \bar{\alpha}\bar{\bar{\beta}} - \bar{\bar{\alpha}}\bar{\beta} = \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} = -(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta) \\ &= -w \end{aligned}$$

よって、 w すなわち $\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta$ は純虚数である。

5

解答 (1) $\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{29}$

解説

$$\begin{aligned} (1) \quad |2+i| &= \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \\ (2) \quad |\beta-\alpha| &= |(5+7i)-(3+2i)| = |2+5i| \\ &= \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29} \end{aligned}$$

6

解答 (1) 9 (2) $-\frac{3}{2}$

解説

$$\begin{aligned} (1) \quad z\bar{z} &= |z|^2 = 9 \\ (2) \quad |z-2| &= 16 \text{ より } (z-2)(\bar{z}-2) = 16 \\ \text{したがって } (z-2)(\bar{z}-2) &= 16 \\ \text{よって } z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 4 &= 16 \\ (1) \text{ より、} z\bar{z} &= 9 \text{ であるから} \\ 9 - 2(z + \bar{z}) + 4 &= 16 \\ \text{したがって } -2(z + \bar{z}) &= 3 \\ \text{よって } z + \bar{z} &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

7

解答 略

解説

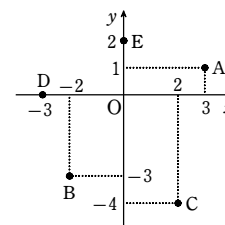
$$|\alpha|=1 \text{ のとき、} |\alpha|^2=1 \text{ であるから } \bar{\alpha}\alpha=1 \text{ すなわち } \frac{1}{\alpha}=\bar{\alpha}$$

$$\text{よって } \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \alpha^2 + (\bar{\alpha})^2 = \alpha^2 + \bar{\alpha}^2$$

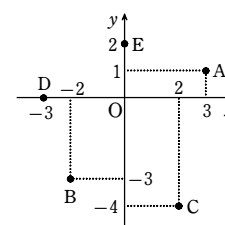
$$\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 \text{ は実数であるから、} \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \text{ は実数である。}$$

1

解説 (図)

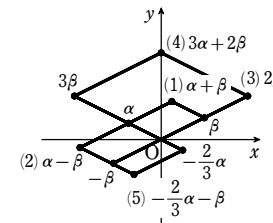


解説



2

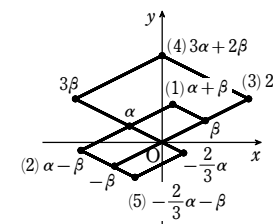
解答 (1)～(5) (図)



解説

右の図で、線分で囲まれた四角形はすべて平行四辺形である。

このとき、(1)から(5)の各点は、右図のようになる。



3

解答 $a = -1, -\frac{1}{2}$

解説

3点 O, P_1, P_2 が同一直線上にある。

$$\iff \frac{z_1}{z_2} \text{ が実数} \iff \frac{z_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \iff z_1\bar{z}_2 = \bar{z}_1z_2$$

$$\text{よって } (3+i(2a-1))(a+2+i) = (3-i(2a-1))(a+2-i)$$

第1講 例題演習

したがって $i\{(2a-1)(a+2)+3\}=0$

ゆえに $(2a-1)(a+2)+3=0$ から $(2a+1)(a+1)=0$

よって $a=-1, -\frac{1}{2}$

別解 3点 O, P_1, P_2 が同一直線上にあるから次の式を満たす実数が存在する。

$$a+2-i=3k+ik(2a-1)$$

$$a, k \text{ が実数であるから } a+2=3k \cdots \cdots \textcircled{1} \quad -1=k(2a-1) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } k \text{ を消去すると } \frac{(a+2)(2a-1)}{3} = -1 \quad \text{よって } (2a+1)(a+1)=0$$

ゆえに $a=-1, -\frac{1}{2}$

4

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1) $w = z\bar{z} + \alpha\bar{z} + \alpha z$ とする。

両辺の共役複素数を考えると

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \overline{z\bar{z} + \alpha\bar{z} + \alpha z} = \overline{z\bar{z}} + \overline{\alpha\bar{z}} + \overline{\alpha z} \\ &= \bar{z}z + \overline{\alpha}z + \alpha\bar{z} = \bar{z}z + \alpha\bar{z} + \alpha z \\ &= w \end{aligned}$$

したがって、 $z\bar{z} + \alpha\bar{z} + \alpha z$ は実数である。

別解 $(z + \alpha)(\bar{z} + \bar{\alpha}) = z\bar{z} + \alpha\bar{z} + \alpha z + \alpha\bar{\alpha}$ から

$$\begin{aligned} w &= (z + \alpha)(\bar{z} + \bar{\alpha}) - \alpha\bar{\alpha} \\ &= (z + \alpha)(\bar{z} + \bar{\alpha}) - \alpha\bar{\alpha} \\ &= |z + \alpha|^2 - |\alpha|^2 \end{aligned}$$

したがって、 $z\bar{z} + \alpha\bar{z} + \alpha z$ は実数である。

(2) $v = \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z$ とする。

$\alpha\bar{z}$ が実数ではないから $\overline{\alpha\bar{z}} \neq \alpha\bar{z}$

よって $\overline{\alpha\bar{z}} \neq \alpha\bar{z}$

ゆえに $\alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z \neq 0$

すなわち $v \neq 0$

$v = \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z$ の両辺の共役複素数を考えると

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \overline{\alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z} = \overline{\alpha\bar{z}} - \overline{\bar{\alpha}z} = -\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z \\ &= -v \end{aligned}$$

したがって、 $\alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z$ は純虚数である。

5

解答 (1) ① $\sqrt{29}$ ② 2 ③ 7 (2) ① $2\sqrt{10}$ ② $5\sqrt{2}$

解説

$$(1) \textcircled{1} \quad |5-2i| = |5+(-2)i| = \sqrt{5^2+(-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$\textcircled{2} \quad |1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\textcircled{3} \quad |-7i| = \sqrt{(-7)^2} = 7$$

$$(2) \textcircled{1} \quad \text{AB} = |(-4+5i)-(2+3i)|$$

$$= |-6+2i| = \sqrt{(-6)^2+2^2}$$

$$= 2\sqrt{10}$$

$$(2) \textcircled{2} \quad \text{AB} = |(3-4i)-(-2+i)| = |5-5i|$$

$$= \sqrt{5^2+(-5)^2} = 5\sqrt{2}$$

6

解答 (1) 25 (2) 6

解説

$$(1) \quad z\bar{z} = |z|^2 = 5^2 = 25$$

$$(2) \quad |z-3| = 4 \text{ から } |z-3|^2 = 16$$

$$\text{よって } (z-3)(\bar{z}-3) = 16$$

$$\text{すなわち } (z-3)(\bar{z}-3) = 16$$

$$\text{展開すると } z\bar{z} - 3z - 3\bar{z} + 9 = 16$$

$$z\bar{z} = 25 \text{ を代入して整理すると } 3(z+\bar{z}) = 18$$

$$\text{したがって } z+\bar{z} = 6$$

7

解答 略

解説

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{1+\alpha^2} &= \frac{\bar{\alpha}}{1+\alpha^2} = \frac{\bar{\alpha}}{1+\bar{\alpha}^2} = \frac{\bar{\alpha}}{1+(\bar{\alpha})^2} \\ &= \frac{\overline{\alpha\alpha^2}}{\{1+(\bar{\alpha})^2\}\alpha^2} = \frac{\alpha(\overline{\alpha\alpha})}{\alpha^2+(\alpha\bar{\alpha})^2} = \frac{\alpha|\alpha|^2}{\alpha^2+|\alpha|^4} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2+1} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \end{aligned}$$

よって、 $\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$ は実数である。

第1講 レベルA

1

解答 (1) $1+2i$ (2) $\frac{1}{3}-2i$

解説

$$(1) \quad 2\bar{z} + z = \overline{2z + \bar{z}} = \overline{1-2i} = 1+2i$$

$$(2) \quad \text{条件式から } 2z + \bar{z} = 1-2i \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(1) \text{ から } 2\bar{z} + z = 1+2i \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} \text{ から } 3z = 1-6i$$

$$\text{よって } z = \frac{1}{3}-2i$$

別解 $z = a+bi$ とおくと

$$2(a+bi) + (a-bi) = 1-2i$$

$$3a+bi = 1-2i$$

$$\text{よって, } a = \frac{1}{3}, b = -2$$

$$\text{したがって, } z = \frac{1}{3}-2i$$

2

解答 略

解説

$\alpha\beta$ が実数のとき $\overline{\alpha\beta} = \alpha\beta$

すなわち $\alpha\bar{\beta} = \alpha\beta$

$\alpha \neq 0$, $\bar{\alpha} \neq 0$ から、両辺を $\alpha\bar{\alpha}$ で割ると

$$\frac{\bar{\beta}}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{すなわち} \quad \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\beta}{\alpha}$$

よって、 $\frac{\beta}{\alpha}$ は実数であるから、 $\frac{\beta}{\alpha} = k$ すなわち $\beta = k\alpha$ となる実数 k がある。

逆に、 $\beta = k\alpha$ となる実数 k があるとき、 $\alpha \neq 0$ から $\frac{\beta}{\alpha} = k$

よって、 $\frac{\beta}{\alpha}$ は実数であるから

$$\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{すなわち} \quad \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} = \frac{\beta}{\alpha}$$

両辺に $\alpha\bar{\alpha}$ を掛けると $\alpha\bar{\beta} = \alpha\beta$

すなわち $\overline{\alpha\beta} = \alpha\beta$

したがって、 $\alpha\bar{\beta}$ は実数である。

3

解答 (1) 略 (2) 2 (3) 0

解説

$$(1) \quad |z-3| = |z+3i| \text{ から } |z-3|^2 = |z+3i|^2$$

$$\text{ゆえに } (z-3)(\bar{z}-3) = (z+3i)(\bar{z}+3i)$$

$$\text{よって } (z-3)(\bar{z}-3) = (z+3i)(\bar{z}-3i)$$

$$\text{展開すると } z\bar{z} - 3z - 3\bar{z} + 9 = z\bar{z} - 3iz + 3i\bar{z} + 9$$

$$\text{整理すると } (1-i)z = -(1+i)\bar{z}$$

$$\text{ゆえに } z = -\frac{1+i}{1-i}\bar{z} = -\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\bar{z} = -\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\bar{z} = -\frac{2i}{2}\bar{z}$$

第1講 レベルA

$$= -i\bar{z}$$
 したがって $z+i\bar{z}=0$

(2) $|z+1|=2|z-2|$ から $|z+1|^2=4|z-2|^2$
 変形すると $(z+1)(\bar{z}+1)=4(z-2)(\bar{z}-2)$
 $(z+1)(\bar{z}+1)=4(z-2)(\bar{z}-2)$
 $z\bar{z}+z+\bar{z}+1=4z\bar{z}-8z-8\bar{z}+16$
 $z\bar{z}-3z-3\bar{z}+5=0$
 $(z-3)(\bar{z}-3)=4$

よって $|z-3|^2=4$
 $|z-3|\geq 0$ であるから $|z-3|=2$

(3) $|\alpha|=\beta=2$ から $|\alpha|^2=|\beta|^2=4$ ゆえに $\alpha\bar{\alpha}=\beta\bar{\beta}=4$

よって $\bar{\alpha}=\frac{4}{\alpha}, \bar{\beta}=\frac{4}{\beta}$ …… ①

また, $|\alpha+\beta|=2$ から $|\alpha+\beta|^2=4$ ゆえに $(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=4$

① を代入して $(\alpha+\beta)\left(\frac{4}{\alpha}+\frac{4}{\beta}\right)=4$ よって $(\alpha+\beta)\cdot\frac{4(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=4$

ゆえに $(\alpha+\beta)^2=\alpha\beta$ したがって $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$

4

解答 (1) $z+\bar{z}=\frac{3}{2}$ (2) $|z-3|=2$ (3) 0

解説

(1) $|z+2|=4$ から $|z+2|^2=16$
 よって $(z+2)(\bar{z}+2)=16$
 $(z+2)(\bar{z}+2)=16$
 $z\bar{z}+2(z+\bar{z})+4=16$

ここで $|z|=3$ から $z\bar{z}=|z|^2=9$
 ゆえに $9+2(z+\bar{z})+4=16$
 $2(z+\bar{z})=3$

よって $z+\bar{z}=\frac{3}{2}$

(2) $|z+1|=2|z-2|$ の両辺を平方すると
 $|z+1|^2=4|z-2|^2$
 $(z+1)(\bar{z}+1)=4(z-2)(\bar{z}-2)$
 $(z+1)(\bar{z}+1)=4(z-2)(\bar{z}-2)$

展開すると
 $z\bar{z}+z+\bar{z}+1=4(z\bar{z}-2(z+\bar{z})+4)$

整理すると
 $3z\bar{z}-9(z+\bar{z})+15=0$
 $z\bar{z}-3(z+\bar{z})+5=0$
 $(z-3)(\bar{z}-3)-9+5=0$
 $(z-3)(\bar{z}-3)=4$
 $|z-3|^2=4$
 よって $|z-3|=2$

(3) $|1-\alpha\beta|^2-|\alpha-\beta|^2=(1-\alpha\beta)(1-\overline{\alpha\beta})-(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$
 $=(1-\alpha\beta)(1-\alpha\bar{\beta})-(\alpha-\beta)(\alpha-\bar{\beta})$

$$=1-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\alpha}\cdot\beta\bar{\beta}-(\alpha\bar{\alpha}-\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta})$$

$$=1+|\alpha|^2|\beta|^2-|\alpha|^2-|\beta|^2=1+|\beta|^2-1-|\beta|^2=0$$

5

解答 (1) 1 (2) i (3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

解説

(1) $z\bar{z}=|z|^2=1^2=1$
 (2) $|z+i|=\sqrt{3}$ から $|z+i|^2=3$
 よって $(z+i)(\bar{z}+i)=3$
 すなわち $(z+i)(\bar{z}-i)=3$
 展開すると $z\bar{z}-iz+i\bar{z}+1=3$
 $z\bar{z}=1$ を代入して整理すると $i(z-\bar{z})=-1$
 よって $z-\bar{z}=i$

(3) $z=a+bi$ (a, b は実数) とおく。
 $\bar{z}=a-bi$ であるから $z-\bar{z}=a+bi-(a-bi)=2bi$

(2) より, $z-\bar{z}=i$ であるから $b=\frac{1}{2}$

また, $|z|=1$ であるから $a^2+b^2=1$
 $b=\frac{1}{2}$ を代入して $a^2=\frac{3}{4}$ よって $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
 したがって $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

第1講 レベルB

1

解答 略

解説

O(0), A(z), B($\bar{z}$), C(w) とする。

OA が対角線のとき

$z=\bar{z}+w$ から $w=z-\bar{z}$ ゆえに $\bar{w}=\overline{z-\bar{z}}=\bar{z}-z=-w$
 よって, 点 w は虚軸上にある。

OB が対角線のとき

$\bar{z}=w+z$ から $w=\bar{z}-z$ ゆえに $\bar{w}=\overline{\bar{z}-z}=z-\bar{z}=-w$
 よって, 点 w は虚軸上にある。

OC が対角線のとき

$w=z+\bar{z}$ から $\bar{w}=\overline{z+\bar{z}}=\bar{z}+z=w$
 よって, 点 w は実軸上にある。

以上から, 題意は示された。

2

解答 略

解説

$\left|\frac{\alpha+z}{1+\alpha z}\right|<1$ を同値変形すると
 $\left|\frac{\alpha+z}{1+\alpha z}\right|<1$
 $\iff \frac{|\alpha+z|}{|1+\alpha z|}<1$
 $\iff |\alpha+z|<|1+\alpha z|$
 $\iff |\alpha+z|^2<|1+\alpha z|^2$
 $\iff (\alpha+z)(\bar{\alpha}+\bar{z})<(1+\alpha z)(1+\alpha\bar{z})$
 $\iff |\alpha|^2+|z|^2<1+|\alpha|^2|z|^2$
 $\iff (|\alpha|^2-1)(|z|^2-1)>0$

$|\alpha|<1$ であるから $|\alpha|^2-1<0$

よって $|z|^2-1<0 \iff |z|<1$

したがって, 複素数 z が $\left|\frac{\alpha+z}{1+\alpha z}\right|<1$ を満たすための必要十分条件は, $|z|<1$ である。

3

解答 (1) $\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$ (2) 略

解説

(1) $z_1+z_2=(r_1\cos\theta_1+r_2\cos\theta_2)+i(r_1\sin\theta_1+r_2\sin\theta_2)$

よって

$|z_1+z_2|^2$
 $=(r_1\cos\theta_1+r_2\cos\theta_2)^2+(r_1\sin\theta_1+r_2\sin\theta_2)^2$
 $=r_1^2(\cos^2\theta_1+\sin^2\theta_1)+r_2^2(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2)+2r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)$
 $=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)$

したがって $|z_1+z_2|=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$

(2) $|z_1+z_2|^2-(|z_1|+|z_2|)^2$

第1講 レベルB

$$=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)-(r_1+r_2)^2=2r_1r_2\{\cos(\theta_1-\theta_2)-1\}$$

$$-1\leq\cos(\theta_1-\theta_2)\leq 1 \text{ より } |z_1+z_2|^2-(|z_1|+|z_2|)^2\leq 0$$

すなわち $|z_1+z_2|^2\leq(|z_1|+|z_2|)^2$

$$|z_1+z_2|\geq 0, |z_1|+|z_2|\geq 0 \text{ であるから } |z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$$

【参考】 (2) の不等式において、等号が成り立つのは $\cos(\theta_1-\theta_2)=1$
すなわち $\theta_1-\theta_2=2n\pi$ (n は整数) のときである。

第2講 例題

1

【解答】 (1) $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (2) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

(3) $3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ (4) $4(\cos\pi+i\sin\pi)$

【解説】

(1) $|3+\sqrt{3}i|=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$
また、偏角は $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=\frac{1}{2}$

$$0\leq\theta<2\pi \text{ の範囲で } \theta \text{ の値は } \theta=\frac{\pi}{6}$$

ゆえに $3+\sqrt{3}i=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(2) $|2-2i|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
また、偏角は $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$0\leq\theta<2\pi \text{ の範囲で } \theta \text{ の値は } \theta=\frac{7}{4}\pi$$

ゆえに $2-2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

(3) $|3i|=\sqrt{3^2}=3$
また、偏角は $\cos\theta=0$, $\sin\theta=1$

$$0\leq\theta<2\pi \text{ の範囲で } \theta \text{ の値は } \theta=\frac{\pi}{2}$$

ゆえに $3i=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(4) $|-4|=4$
また、偏角は $\cos\theta=-1$, $\sin\theta=0$
 $0\leq\theta<2\pi$ の範囲で θ の値は $\theta=\pi$
ゆえに $-4=4(\cos\pi+i\sin\pi)$

2

【解答】 $\alpha\beta=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{23}{12}\pi+i\sin\frac{23}{12}\pi\right)$, $\frac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$

【解説】

$$\alpha=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\beta=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right) \text{ と表される。}$$

よって $\alpha\beta=2\sqrt{2}\cdot 2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{3}\pi\right)\right\}$

$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{23}{12}\pi+i\sin\frac{23}{12}\pi\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5}{3}\pi\right)\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{17}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{17}{12}\pi\right)\right\}$$

$$-\frac{17}{12}\pi=\frac{7}{12}\pi+2\pi\times(-1) \text{ から } \frac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$$

3

【解答】 $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

【解説】

$1+\sqrt{3}i$, $1+i$ をそれぞれ極形式で表すと

$$1+\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

したがって $\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$
 $=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right) \dots\dots ①$

また $\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}=\frac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i+\sqrt{3}i+\sqrt{3}}{1+1}$
 $=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i \dots\dots ②$

よって、①、② から $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

したがって $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

4

【解答】 (1) (ア) $3+\sqrt{3}+(1-3\sqrt{3})i$ (イ) $-6-2i$

(2) 原点を中心として $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転し、原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍した点

【解説】

(1) 求める点を表す複素数は

(ア) $\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)z=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(2-6i)=\sqrt{3}-3\sqrt{3}i+i+3$
 $=3+\sqrt{3}+(1-3\sqrt{3})i$

(イ) $\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}z=-i(2-6i)=-6-2i$

(2) $(1-i)z=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)z=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}z$

よって、点 $(1-i)z$ は、点 z を原点を中心として $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転し、原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍した点である。

5

【解答】 (1) $r=-\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})i$ (2) $z=-1+3i$, $\sqrt{3}-1$ (3) $\frac{\pi}{4}$

【解説】

第2講 例題

- (1) 点 α が原点 O に移るような平行移動で、点 β , γ が

$$\begin{aligned}\beta' &= \beta - \alpha = (-1 + 4i) - (1 + 2i) \\ &= -2 + 2i\end{aligned}$$

$$\gamma' = \gamma - \alpha$$

点 γ' は、点 β' を原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点

であるから

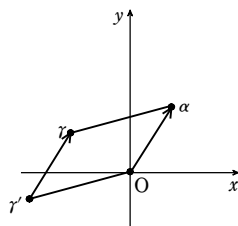
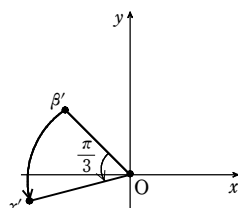
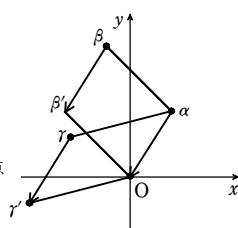
$$\gamma' = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (-2 + 2i)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (-2 + 2i)$$

$$= (-1 - \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i$$

よって

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma' + \alpha \\ &= (-1 - \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i + (1 + 2i) \\ &= -\sqrt{3} + (3 - \sqrt{3})i\end{aligned}$$



- (2) 点 C は、点 A を中心として点 B を $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$

だけ回転した点である。

回転角が $\frac{\pi}{3}$ のとき

$$z = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \{ (\sqrt{3} - 1 + 2i) - (-1 + i) \}$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) - 1 + i = 2i - 1 + i$$

$$= -1 + 3i$$

回転角が $-\frac{\pi}{3}$ のとき

$$z = \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\} \{ (\sqrt{3} - 1 + 2i) - (-1 + i) \} - 1 + i$$

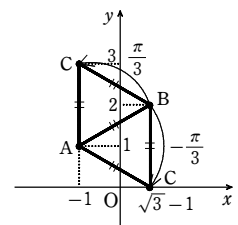
$$= \frac{1}{2} (1 - \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) - 1 + i = \sqrt{3} - i - 1 + i = \sqrt{3} - 1$$

したがって $z = -1 + 3i, \sqrt{3} - 1$

- (3) $\alpha = 2 + 2i, \beta = 4 + i, \gamma = 5 + 3i$ とする。

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{5 + 3i - (2 + 2i)}{4 + i - (2 + 2i)} = \frac{3 + i}{2 - i} = \frac{(3 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{6 + 3i + 2i + i^2}{4 - i^2}$$

$$= \frac{5 + 5i}{5} = 1 + i$$



偏角 θ の範囲を $-\pi < \theta \leq \pi$ として、 $1 + i$ を極形式で表すと

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{よって } \angle BAC = \frac{\pi}{4}$$

[6]

$$\text{〔解答〕 (1) } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \quad (2) (1, -2)$$

〔解説〕

- (1) 座標平面上の点 $A(2, 1)$ は、複素数平面上で $2 + i$ と表される。

点 $2 + i$ を、原点 O を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点を表す複素数は

$$\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) (2 + i) = \frac{1 + i}{\sqrt{2}} (2 + i) = \frac{1 + 3i}{\sqrt{2}}$$

$$\text{したがって } B \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}} \right)$$

- (2) $P(x, y)$ として、複素数平面上で考えると、条件から

$$1 - \sqrt{2} + (-2 + 2\sqrt{2})i = \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \{ (2 + i) - (x + yi) \} + (x + yi)$$

$$\text{よって } 1 - \sqrt{2} + (-2 + 2\sqrt{2})i = \frac{1 + 3i}{\sqrt{2}} + \left(1 - \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \right) (x + yi)$$

$$\text{両辺に } \sqrt{2} \text{ を掛けて } \sqrt{2} - 2 + (4 - 2\sqrt{2})i = 1 + 3i + (\sqrt{2} - 1 - i)(x + yi)$$

$$\text{ゆえに } (\sqrt{2} - 1 - i)(x + yi) = \sqrt{2} - 3 + (1 - 2\sqrt{2})i$$

$$\text{よって } x + yi = \frac{\sqrt{2} - 3 + (1 - 2\sqrt{2})i}{\sqrt{2} - 1 - i} = \frac{\{ \sqrt{2} - 3 + (1 - 2\sqrt{2})i \} (\sqrt{2} - 1 + i)}{(\sqrt{2} - 1 - i)(\sqrt{2} - 1 + i)}$$

$$\begin{aligned}\text{ここで (分子)} &= (\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} - 1) + \{ (\sqrt{2} - 3) + (1 - 2\sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) \} i - (1 - 2\sqrt{2}) \\ &= 4 - 2\sqrt{2} - 2(4 - 2\sqrt{2})i = (4 - 2\sqrt{2})(1 - 2i)\end{aligned}$$

$$\text{(分母)} = (\sqrt{2} - 1)^2 + 1 = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$\text{ゆえに } x + yi = \frac{(4 - 2\sqrt{2})(1 - 2i)}{4 - 2\sqrt{2}} = 1 - 2i$$

$$\text{よって } x = 1, y = -2 \quad \text{したがって } P(1, -2)$$

第2講 例題演習

[1]

$$\text{〔解答〕 (1) } \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) \quad (2) 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right)$$

$$(3) 2 \left(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi \right) \quad (4) 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$(5) 3(\cos \pi + i \sin \pi) \quad (6) 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

〔解説〕

絶対値を r とする。

$$(1) r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ では } \theta = \frac{3}{4}\pi$$

$$\text{よって } -1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)$$

$$(2) r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ では } \theta = \frac{7}{4}\pi$$

$$\text{よって } 2 - 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right)$$

$$(3) r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = -\frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ では } \theta = \frac{7}{6}\pi$$

$$\text{よって } -\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi \right)$$

$$(4) r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$\cos \theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ では } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{よって } 2 + 2\sqrt{3}i = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$(5) r = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$$

$$\cos \theta = -\frac{3}{3} = -1, \quad \sin \theta = \frac{0}{3} = 0$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ では } \theta = \pi$$

$$\text{よって } -3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$(6) r = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{0}{2} = 0, \quad \sin \theta = \frac{2}{2} = 1$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ では } \theta = \frac{\pi}{2}$$

第2講 例題演習

$$\text{よって} \quad 2i = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

[2]

$$\text{[解答]} \quad (1) \quad \alpha\beta = 2\sqrt{6}\left(\cos \frac{11}{12}\pi + i \sin \frac{11}{12}\pi\right), \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\cos \frac{7}{12}\pi + i \sin \frac{7}{12}\pi\right)$$

$$(2) \quad \alpha\beta = 4\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right), \quad \frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{2}\left(\cos \frac{17}{12}\pi + i \sin \frac{17}{12}\pi\right)$$

[解説]

(1) α, β をそれぞれ極形式で表すと

$$\alpha = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right),$$

$$\beta = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \alpha\beta &= \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3}\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right\} \\ &= 2\sqrt{6}\left(\cos \frac{11}{12}\pi + i \sin \frac{11}{12}\pi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right\} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\cos \frac{7}{12}\pi + i \sin \frac{7}{12}\pi\right) \end{aligned}$$

(2) α, β をそれぞれ極形式で表すと

$$\alpha = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right),$$

$$\beta = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \alpha\beta &= 2\sqrt{2} \cdot 2\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{4}{3}\pi\right)\right\} \\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos \frac{25}{12}\pi + i \sin \frac{25}{12}\pi\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right) \\ \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{2\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{4}{3}\pi\right)\right\} \\ &= \sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{7}{12}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{7}{12}\pi\right)\right\} = \sqrt{2}\left(\cos \frac{17}{12}\pi + i \sin \frac{17}{12}\pi\right) \end{aligned}$$

[3]

$$\text{[解答]} \quad \cos \frac{5}{12}\pi = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \sin \frac{5}{12}\pi = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

[解説]

$1+i, \sqrt{3}+i$ をそれぞれ極形式で表すと

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad (1+i)(\sqrt{3}+i) &= \sqrt{2} \cdot 2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right\} \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{5}{12}\pi + i \sin \frac{5}{12}\pi\right) \quad \cdots \cdots ① \end{aligned}$$

$$\text{また} \quad (1+i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i \quad \cdots \cdots ②$$

$$\text{よって, ①, ② から} \quad 2\sqrt{2}\cos \frac{5}{12}\pi = \sqrt{3}-1, \quad 2\sqrt{2}\sin \frac{5}{12}\pi = \sqrt{3}+1$$

$$\text{したがって} \quad \cos \frac{5}{12}\pi = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \sin \frac{5}{12}\pi = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

[4]

$$\text{[解答]} \quad (1) \quad \textcircled{1} \quad w_1 = \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i \quad \textcircled{2} \quad w_2 = -2+4i$$

$$\textcircled{3} \quad w_3 = -1+2\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})i$$

$$(2) \quad (\text{ア}) \quad \text{原点を中心として} \frac{3}{4}\pi \text{ だけ回転した点}$$

$$(\text{イ}) \quad \text{原点を中心として} \frac{\pi}{3} \text{ だけ回転し, 原点からの距離を} \frac{1}{2} \text{ 倍した点}$$

$$(\text{ウ}) \quad \text{実軸に関して対称移動し, 原点を中心として} -\frac{\pi}{2} \text{ だけ回転した点}$$

[解説]

$$(1) \quad \textcircled{1} \quad w_1 = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-3+i)$$

$$= \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad w_2 &= \sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}z \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(-3+i) = -2+4i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad w_3 &= \left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}z = -\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \cdot (2+4i) \\ &= -1+2\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})i \end{aligned}$$

$$(2) \quad (\text{ア}) \quad \frac{-1+i}{\sqrt{2}}z = \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right)z$$

$$\text{よって, 点} \frac{-1+i}{\sqrt{2}}z \text{ は, 点} z \text{ を原点を中心として} \frac{3}{4}\pi \text{ だけ回転した点である。}$$

$$(\text{イ}) \quad \frac{z}{1-\sqrt{3}i} = \frac{1+\sqrt{3}i}{4}z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z = \frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)z$$

$$\text{よって, 点} \frac{z}{1-\sqrt{3}i} \text{ は, 点} z \text{ を原点を中心として} \frac{\pi}{3} \text{ だけ回転し, 原点からの距離}$$

$$\text{を} \frac{1}{2} \text{ 倍した点である。}$$

$$(\text{ウ}) \quad \text{点} z \text{ と点} \bar{z} \text{ は実軸に関して対称である。}$$

$$\text{また} \quad -i\bar{z} = (0-i)\bar{z} = \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\bar{z}$$

$$\text{よって, 点} -i\bar{z} \text{ は, 点} z \text{ を実軸に関して対称移動し, 原点を中心として} -\frac{\pi}{2} \text{ だけ}$$

[5]

$$\text{[解答]} \quad (1) \quad \textcircled{1} \quad 1+2\sqrt{3}i \quad \textcircled{2} \quad 2-2\sqrt{3}+(4-\sqrt{3})i \quad \textcircled{2} \quad \beta = -1+5i, 5+i$$

$$(3) \quad \frac{3}{4}\pi$$

[解説]

(1) 点 α が原点に移るような平行移動によって, 点 β が点 β' に移るとすると

$$\beta' = \beta - \alpha = (6+\sqrt{3}i) - (2-\sqrt{3}i) = 4+2\sqrt{3}i$$

① 点 β' を原点の周りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を β'' とすると

$$\beta'' = \beta'\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = (4+2\sqrt{3}i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1+3\sqrt{3}i$$

よって, 求める複素数は

$$\beta'' + \alpha = (-1+3\sqrt{3}i) + (2-\sqrt{3}i) = 1+2\sqrt{3}i$$

② 点 β' を原点の周りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点を β'' とすると

$$\beta'' = \beta'\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = (4+2\sqrt{3}i) \cdot i = -2\sqrt{3}+4i$$

よって, 求める複素数は

$$\beta'' + \alpha = (-2\sqrt{3}+4i) + (2-\sqrt{3}i) = 2-2\sqrt{3}+(4-\sqrt{3})i$$

(2) 点 $\mathbf{B}$ は, 点 $\mathbf{A}$ を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ または $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転し, 原点からの距離を

$\sqrt{2}$ 倍した点である。

[1] $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した場合

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)(2+3i) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(2+3i) = -1+5i \end{aligned}$$

[2] $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転した場合

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}(2+3i) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(2+3i) = 5+i \end{aligned}$$

[別解] 点 $\mathbf{B}$ は, 原点を点 $\mathbf{A}$ を中心として $\pm\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

点 $\mathbf{A}$ が原点に移るような平行移動で, 点 $\mathbf{O}, \mathbf{B}$ がそれぞれ点 $\mathbf{O}', \mathbf{B}'$ に移るとすると $\mathbf{O}'(-2-3i), \mathbf{B}'(\beta-(2+3i))$

点 $\mathbf{B}'$ は点 $\mathbf{O}'$ を原点を中心として $\pm\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点であるから

$$\beta-(2+3i) = \pm i(-2-3i) = \pm 3 \mp 2i \text{ (複号同順)}$$

$$\text{よって} \quad \beta = -1+5i, 5+i$$

(3) $\alpha=2-3i, \beta=5-i, \gamma=-3-2i$ とする。

$$\begin{aligned} \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} &= \frac{-3-2i-(2-3i)}{5-i-(2-3i)} = \frac{-5+i}{3+2i} = \frac{(-5+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{-15+10i+3i-2i^2}{9-4i^2} \\ &= \frac{-13+13i}{13} = -1+i \end{aligned}$$

偏角 θ の範囲を $-\pi < \theta \leq \pi$ として, $-1+i$ を極形式で表すと

$$-1+i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$\text{よって} \quad \angle \text{BAC} = \frac{3}{4}\pi$$

[6]

$$\text{[解答]} \quad (1) \quad \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}+\sqrt{3}\right) \quad (2) \quad (1, -2)$$

[解説]

- (1) 複素数平面上で、点 $2+i$ を原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数は

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)(2+i) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+i) \\ &= \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)i \end{aligned}$$

よって、点 B の座標は $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)$

- (2) 点 P の座標を (x, y) とする。点 P が原点に移るような平行移動で、点 A、Q がそれぞれ A'、Q' に移るとすると

$$A'(2-x, 1-y), \quad Q'\left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} - x, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)$$

点 Q' は点 A' を原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} - x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)i \\ = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left((2-x) + (1-y)i\right) \end{aligned}$$

右辺を整理すると

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} - x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)i \\ = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2}\right)i \end{aligned}$$

x, y は実数であるから

$$\begin{aligned} 3 - 3\sqrt{3} - 2x &= 2 - \sqrt{3} - x + \sqrt{3}y, \\ -1 + \sqrt{3} - 2y &= 1 + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}x - y \end{aligned}$$

この連立方程式を解くと $x=1, y=-2$

よって、点 P の座標は $(1, -2)$

1

解答 (1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi\right)$ (2) $4\left(\cos \frac{6}{5}\pi + i \sin \frac{6}{5}\pi\right)$

(3) $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$

解説

(1) (与式) $= \frac{(3+2i)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)} = \frac{3+(-15+2i-10i^2)}{1^2+5^2} = \frac{1-i}{2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi\right)$$

(2) $-4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$ であるから

$$(\text{与式}) = 4(\cos \pi + i \sin \pi) \cdot \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right) = 4\left\{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right)\right\}$$

$$= 4\left(\cos \frac{6}{5}\pi + i \sin \frac{6}{5}\pi\right)$$

別解 (与式) $= 4\left(-\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}\right) = 4\left\{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right)\right\}$

$$= 4\left(\cos \frac{6}{5}\pi + i \sin \frac{6}{5}\pi\right)$$

(3) (与式) $= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$

2

解答 i **解説**

題意のように移動した点を表す複素数は

$$z\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) + 1 + i = iz + 1 + i$$

よって、 $z = iz + 1 + i$ が成り立つとき

$$z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1^2-i^2} = i$$

3

解答 $a=-4, 1$ **解説**

直線 OB は、直線 OA を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ または $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転すると得られる。

よって $\angle \alpha 0 \beta = \frac{\pi}{4}$ または $\angle \alpha 0 \beta = -\frac{\pi}{4}$

[1] $\angle \alpha 0 \beta = \frac{\pi}{4}$ のとき

$$r_1 \text{ を実数として, } \beta = r_1\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\alpha \text{ と表される。}$$

$$\text{よって} \quad 3 + (2a-1)i = r_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(2-i)$$

$$\text{整理すると} \quad 3 + (2a-1)i = \frac{3}{\sqrt{2}}r_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}r_1i$$

$$\text{ゆえに} \quad 3 = \frac{3}{\sqrt{2}}r_1, \quad 2a-1 = \frac{1}{\sqrt{2}}r_1$$

$$\text{これを解くと} \quad r_1 = \sqrt{2}, \quad a = 1$$

[2] $\angle \alpha 0 \beta = -\frac{\pi}{4}$ のとき

$$r_2 \text{ を実数として, } \beta = r_2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\alpha \text{ と表される。}$$

$$\text{よって} \quad 3 + (2a-1)i = r_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(2-i)$$

$$\text{整理すると} \quad 3 + (2a-1)i = \frac{1}{\sqrt{2}}r_2 - \frac{3}{\sqrt{2}}r_2i$$

$$\text{ゆえに} \quad 3 = \frac{1}{\sqrt{2}}r_2, \quad 2a-1 = -\frac{3}{\sqrt{2}}r_2$$

$$\text{これを解くと} \quad r_2 = 3\sqrt{2}, \quad a = -4$$

[1], [2] から $a = -4, 1$

4

解答 (1) $\beta = -1 + 5i, 5 + i$ (2) $z = 4 + 2\sqrt{3}i, 1 - 3\sqrt{3}i$

解説

- (1) 点 B は、点 A を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ または $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転し、原点からの距離を

$\sqrt{2}$ 倍した点である。

[1] $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した場合

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)(2+3i) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(2+3i) = -1 + 5i \end{aligned}$$

[2] $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転した場合

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}(2+3i) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(2+3i) = 5 + i \end{aligned}$$

別解 点 B は、原点を点 A を中心として $\pm \frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

点 A が原点に移るような平行移動で、点 O、B がそれぞれ点 O'、B' に移るとすると $O'(-2-3i), B'(\beta-(2+3i))$

点 B' は点 O' を原点を中心として $\pm \frac{\pi}{2}$ だけ回転した点であるから

$$\beta - (2+3i) = \pm i(-2-3i) = \pm 3 \mp 2i \text{ (複号同順)}$$

$$\text{よって} \quad \beta = -1 + 5i, 5 + i$$

- (2) O(0), A($5-\sqrt{3}i$), B(z) とおくと、 $\triangle OAB$ が正三角形であるとき

$$OA = OB, \quad \angle AOB = \frac{\pi}{3}$$

したがって、点 B は、点 O を中心として、点 A を $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点で

$$\text{あるから} \quad z = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)(5-\sqrt{3}i) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{または} \quad z = \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(5-\sqrt{3}i) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ から} \quad z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(5-\sqrt{3}i) = 4 + 2\sqrt{3}i$$

第2講 レベルA

② から $z = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(5 - \sqrt{3}i) = 1 - 3\sqrt{3}i$

5

【解答】 (1) $(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ (2) $\frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+2\sqrt{3}}{2}i$

(3) $\theta = \frac{\pi}{3}$

【解説】

(1) 座標平面上の点 $P(x, y)$ に対応する複素数平面の複素数を z とすると $z = x + yi$

同様に、点 Q に対応する複素数を w とすると、条件から

$$\begin{aligned} w &= (\cos\theta + i\sin\theta)z = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + yi) \\ &= x\cos\theta + i y\cos\theta + i x\sin\theta + i^2 y\sin\theta \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta) + (x\sin\theta + y\cos\theta)i \end{aligned}$$

よって、点 Q の座標は $(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$

(2) 点 z を点 w の周りに θ だけ回転した点を表す複素数は

$(z - w)(\cos\theta + i\sin\theta) + w$ と表される。

したがって

$$\begin{aligned} \{3 + i - (2 - i)\}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) + 2 - i &= (1 + 2i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + 2 - i \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + 2\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

(3) $\frac{4+3\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+2\sqrt{3}}{2}i = \{3 - 2i - (1 + i)\}(\cos\theta + i\sin\theta) + 1 + i$

$$= (2 - 3i)(\cos\theta + i\sin\theta) + 1 + i$$

$$= 2\cos\theta + 3\sin\theta + 1 + (-3\cos\theta + 2\sin\theta + 1)i$$

ゆえに $2\cos\theta + 3\sin\theta + 1 = \frac{4+3\sqrt{3}}{2}$, $-3\cos\theta + 2\sin\theta + 1 = \frac{-1+2\sqrt{3}}{2}$

これを解くと $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

したがって $\theta = \frac{\pi}{3}$

第2講 レベルB

1

【解答】 $-5 + \sqrt{3}i$

【解説】

求める複素数を w とする。

$$1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

であるから、点 z を原点の周りに $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した

点を z' とすると

$$\begin{aligned} z' &= z\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= (4 - 2\sqrt{3}i)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - 3\sqrt{3}i \end{aligned}$$

点 z' を実軸に関して対称移動した点を、原点の周りに

$\frac{\pi}{3}$ だけ回転させると、求める点 w が得られる。

点 z' と実軸に関して対称な点は、 $\overline{z'}$ で表されるから

$$w = \overline{z'}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = (-1 + 3\sqrt{3}i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -5 + \sqrt{3}i$$

2

【解答】 $C(4 + 5i)$, $D(6i)$ または $C(2 - 3i)$, $D(-2 - 2i)$

【解説】

点 $C(r)$, $D(\delta)$ とする。点 D は、点 B を点 A を中心と

して $\pm\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

点 A が原点に移るような平行移動で、点 B , D がそれぞれ点 B' , D' に移るとすると

$$B'(4 - i), D'(-1 + 2i)$$

点 D' は、点 B' を原点を中心として $\pm\frac{\pi}{2}$ だけ回転した

点であるから $\delta - (-1 + 2i) = \pm i(4 - i)$ (複号同順)

よって $\delta = i(4 - i) + (-1 + 2i) = 6i$

または $\delta = -i(4 - i) + (-1 + 2i) = -2 - 2i$

また、点 C は、点 D を点 A から点 B に向かう向きに

$$3 + i - (-1 + 2i)$$

すなわち $4 - i$ だけ平行移動すると得られる。

よって $r = \delta + 4 - i$

したがって、 $\delta = 6i$ のとき $r = 4 + 5i$

$\delta = -2 - 2i$ のとき $r = 2 - 3i$

ゆえに $C(4 + 5i)$, $D(6i)$ または $C(2 - 3i)$, $D(-2 - 2i)$

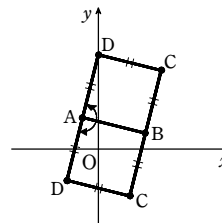
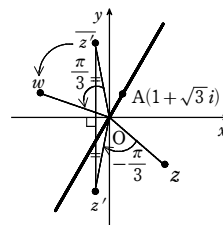
3

【解答】 (1) 1 (2) $z = \pm i$, $\frac{\pm 1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ (複号任意)

【解説】

(1) $z + \frac{1}{z}$ が実数となるとき $z + \frac{1}{z} = \overline{z + \frac{1}{z}}$

すなわち $z + \frac{1}{z} = \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}}$



両辺に $z\overline{z}$ を掛けると $z^2\overline{z} + \overline{z} = z(\overline{z})^2 + z$

$z\overline{z} = |z|^2$ であるから、整理すると $(z - \overline{z})|z|^2 - (z - \overline{z}) = 0$

すなわち $(z - \overline{z})(|z|^2 - 1) = 0$

z は虚数であるから $z \neq \overline{z}$ よって $|z|^2 = 1$

$|z| > 0$ であるから $|z| = 1$

(2) $z + \frac{1}{z}$ が整数となるとき、 $z + \frac{1}{z}$ は実数であるから、(1)の結果より $|z| = 1$

よって、 $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とおける。

ここで、 z は虚数であるから $\sin\theta \neq 0$

$\frac{1}{z} = \cos\theta - i\sin\theta$ であるから

$$z + \frac{1}{z} = (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta) = 2\cos\theta$$

$\sin\theta \neq 0$ より $-1 < \cos\theta < 1$ であるから、これが整数となるとき

$$2\cos\theta = 0, \pm 1 \quad \text{すなわち} \quad \cos\theta = 0, \pm \frac{1}{2}$$

$\cos\theta = 0$ のとき $\sin\theta = \pm 1$

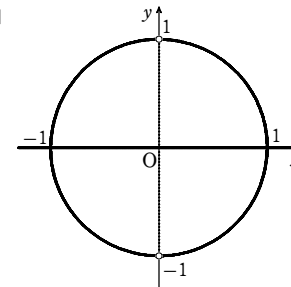
$\cos\theta = \frac{1}{2}$ のとき $\sin\theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ のとき $\sin\theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

よって、求める z の値は $z = \pm i, \frac{\pm 1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ (複号任意)

4

【解答】 (1) 略 (2) [図]



【解説】

(1) $|z| = 1$ であれば $|z|^2 = 1$ であるから $z\overline{z} = 1$ よって $\overline{z} = \frac{1}{z}$

ゆえに $z^3 + \frac{1}{z^3} = z^3 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + (\overline{z})^3 = z^3 + \overline{z^3}$

よって、 $z^3 + \frac{1}{z^3}$ は実数である。

(2) $\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}$ が実数となるための条件は

$$\overline{\left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}\right)} = \frac{1}{\overline{z+i}} + \frac{1}{\overline{z-i}}$$

左辺を変形すると $\frac{1}{\overline{z-i}} + \frac{1}{\overline{z+i}} = \frac{1}{\overline{z+i}} + \frac{1}{\overline{z-i}}$

$$\text{すなわち } \frac{2\bar{z}}{(\bar{z})^2+1} = \frac{2z}{z^2+1}$$

$$\text{ゆえに } \bar{z}(z^2+1) = z(\bar{z}^2+1)$$

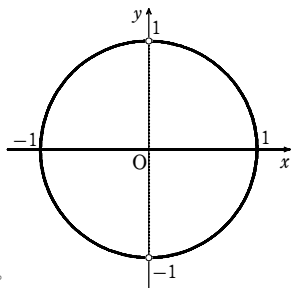
$$z\bar{z} = |z|^2 \text{ であるから } |z|^2 z + \bar{z} = |z|^2 \bar{z} + z$$

$$\text{よって } (|z|^2-1)(z-\bar{z})=0$$

$$\text{ゆえに } |z|=1 \text{ または } z=\bar{z}$$

$$\text{したがって, } \frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} \text{ が実数となるような}$$

点 z 全体は、原点を中心とする半径1の円のうち、2点 i 、 $-i$ を除いた部分と実軸の和集合であり、図示すると右の図の太い実線部分となる。



1

$$\text{【解答】 (1) } 64 \quad (2) -\frac{1}{4} \quad (3) -\frac{81}{2} - \frac{81\sqrt{3}}{2}i$$

【解説】

$$(1) \quad 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \text{ から}$$

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{3}i)^6 &= 2^6 \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6 \\ &= 64(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) \\ &= 64 \end{aligned}$$

$$(2) \quad 1 - i = \sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

から

$$\begin{aligned} (1 - i)^{-4} &= (\sqrt{2})^{-4} \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{-4} \\ &= \frac{1}{4}(\cos \pi + i\sin \pi) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{3 + \sqrt{3}i}{2} &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + i) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \text{ から} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{3 + \sqrt{3}i}{2}\right)^8 &= (\sqrt{3})^8 \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^8 \\ &= 3^4 \left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) \\ &= 81\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{81}{2} - \frac{81\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

2

$$\text{【解答】 (1) } 0 \quad (2) -1$$

【解説】

$$(1) \quad \alpha^{20} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \quad \text{よって} \quad \alpha^{20} - 1 = 0$$

$$\text{左辺を因数分解すると } (\alpha - 1)(\alpha^{19} + \alpha^{18} + \cdots + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10} \neq 1 \text{ から } (\text{与式}) = 0$$

$$(2) \quad (\text{与式}) = \alpha^{1+2+\cdots+19} = \alpha^{\frac{1}{2} \cdot 19(19+1)} = \alpha^{190}$$

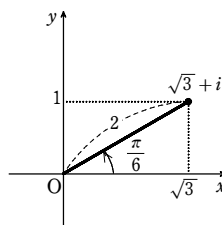
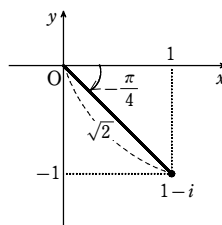
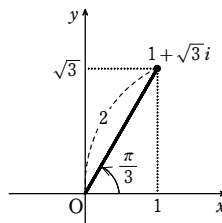
$$\begin{aligned} &= \alpha^{20 \times 9 + 10} = \alpha^{10} = \left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)^{10} \\ &= \cos \pi + i\sin \pi = -1 \end{aligned}$$

3

$$\text{【解答】 (1) } z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \text{ または } z = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad (2) -2$$

【解説】

$$(1) \quad z + \frac{1}{z} = \sqrt{2} \text{ から } z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$$



$$\text{これを解いて } z = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

よって

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \text{ のとき } z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \text{ のとき } z = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(2) \quad [1] \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \text{ のとき}$$

$$z^{20} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{20} = \cos 5\pi + i\sin 5\pi = -1$$

$$\text{よって } z^{20} + \frac{1}{z^{20}} = -1 + \frac{1}{-1} = -2$$

$$[2] \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} z^{20} &= \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{20} \\ &= \cos(-5\pi) + i\sin(-5\pi) = -1 \end{aligned}$$

$$\text{よって } z^{20} + \frac{1}{z^{20}} = -1 + \frac{1}{-1} = -2$$

$$\text{以上より } z^{20} + \frac{1}{z^{20}} = -2$$

4

$$\text{【解答】 } n = 24$$

【解説】

$$1 + i, \sqrt{3} + i \text{ をそれぞれ極形式で表すと}$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{よって } z &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } z^n &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^n \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(\cos\frac{n}{12}\pi + i\sin\frac{n}{12}\pi\right) \end{aligned}$$

 z^n が正の実数となるとき

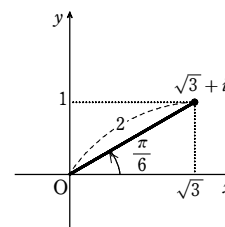
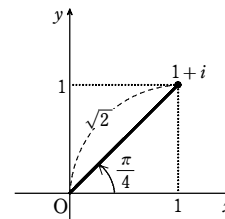
$$\cos\frac{n}{12}\pi > 0, \quad \sin\frac{n}{12}\pi = 0$$

$$\text{ゆえに } \frac{n}{12}\pi = 2m\pi \quad (m \text{ は整数})$$

$$\text{よって, 最小の正の整数 } n \text{ は } m=1 \text{ のときで, } \frac{n}{12}\pi = 2\pi \text{ から } n=24$$

5

$$\text{【解答】 } m=6, n=12$$



第3講 例題

解説

$\sqrt{3}+i=2(\cos 30^{\circ}+i \sin 30^{\circ})$, $1+i=\sqrt{2}(\cos 45^{\circ}+i \sin 45^{\circ})$ であるから

$(\sqrt{3}+i)^m=2^m[\cos (30^{\circ} \times m)+i \sin (30^{\circ} \times m)]$,

$(1+i)^n=(\sqrt{2})^n[\cos (45^{\circ} \times n)+i \sin (45^{\circ} \times n)]$

ゆえに $2^m \cos (30^{\circ} \times m)=(\sqrt{2})^n \cos (45^{\circ} \times n) \cdots \cdots \textcircled{1}$

$2^m \sin (30^{\circ} \times m)=(\sqrt{2})^n \sin (45^{\circ} \times n) \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}^2+\textcircled{2}^2$ から $2^{2m}=(\sqrt{2})^{2n}$ よって $n=2m \cdots \cdots \textcircled{3}$

また $45^{\circ} \times n-30^{\circ} \times m=360^{\circ} \times k$ (k は整数) $\cdots \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{3}$ を $\textcircled{4}$ に代入して $90^{\circ} \times m-30^{\circ} \times m=360^{\circ} \times k$

ゆえに $60^{\circ} \times m=360^{\circ} \times k$ から $m=6k$

よって, 最小の正の整数となる m の値は, $k=1$ とすると $m=6$

このとき, $\textcircled{3}$ から $n=12$

6

解答 (1) $z=1, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} i$ (2) $z=\pm(\sqrt{3}+i), \pm(1-\sqrt{3} i)$

解説

(1) z の極形式を $z=r(\cos \theta+i \sin \theta)$

とすると $z^3=r^3(\cos 3 \theta+i \sin 3 \theta)$

また, 1 を極形式で表すと $1=\cos 0+i \sin 0$

よって, 方程式は $r^3(\cos 3 \theta+i \sin 3 \theta)=\cos 0+i \sin 0$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^3=1, 3 \theta=0+2 k \pi \quad(k \text { は整数})$$

$r>0$ であるから $r=1$ また $\theta=\frac{2 k \pi}{3}$

よって $z=\cos \frac{2 k \pi}{3}+i \sin \frac{2 k \pi}{3} \cdots \cdots \textcircled{1}$

$0 \leq \theta<2 \pi$ の範囲では $k=0, 1, 2$

$\textcircled{1}$ で $k=0, 1, 2$ としたときの z をそれぞれ z_0, z_1, z_2 とすると

$$z_0=\cos 0+i \sin 0=1,$$

$$z_1=\cos \frac{2}{3} \pi+i \sin \frac{2}{3} \pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

$$z_2=\cos \frac{4}{3} \pi+i \sin \frac{4}{3} \pi=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} i$$

したがって, 求める解は $z=1, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} i$

(2) z の極形式を $z=r(\cos \theta+i \sin \theta)$

とすると $z^4=r^4(\cos 4 \theta+i \sin 4 \theta)$

また, $-8+8 \sqrt{3} i$ を極形式で表すと

$$-8+8 \sqrt{3} i=16\left(\cos \frac{2}{3} \pi+i \sin \frac{2}{3} \pi\right)$$

よって, 方程式は

$$r^4(\cos 4 \theta+i \sin 4 \theta)=16\left(\cos \frac{2}{3} \pi+i \sin \frac{2}{3} \pi\right)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^4=16, 4 \theta=\frac{2}{3} \pi+2 k \pi \quad(k \text { は整数})$$

$r>0$ であるから $r=2$ また $\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{k \pi}{2}$

よって $z=2\left\{\cos \left(\frac{\pi}{6}+\frac{k \pi}{2}\right)+i \sin \left(\frac{\pi}{6}+\frac{k \pi}{2}\right)\right\} \cdots \cdots \textcircled{1}$

$0 \leq \theta<2 \pi$ の範囲では $k=0, 1, 2, 3$

$\textcircled{1}$ で $k=0, 1, 2, 3$ としたときの z をそれぞれ z_0, z_1, z_2, z_3 とすると

$$z_0=2\left(\cos \frac{\pi}{6}+i \sin \frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i,$$

$$z_1=2\left(\cos \frac{2}{3} \pi+i \sin \frac{2}{3} \pi\right)=-1+\sqrt{3} i,$$

$$z_2=2\left(\cos \frac{7}{6} \pi+i \sin \frac{7}{6} \pi\right)=-\sqrt{3}-i,$$

$$z_3=2\left(\cos \frac{5}{3} \pi+i \sin \frac{5}{3} \pi\right)=1-\sqrt{3} i$$

したがって, 求める解は

$$z=\pm(\sqrt{3}+i), \pm(1-\sqrt{3} i)$$

7

解答 (1) 略 (2) 略 (3) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

解説

(1) $\alpha^5=1$ から $(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha \neq 1$ であるから $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$

$\alpha \neq 0$ であるから, 両辺を α^2 で割ると $\alpha^2+\alpha+1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=0$

(2) $\alpha^5=1$ から $|\alpha|^5=1$ よって $|\alpha|=1$

ゆえに $|\alpha|^2=1$ すなわち $\alpha \overline{\alpha}=1$ よって $\overline{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$

ゆえに $t^2+t-1=(\alpha+\overline{\alpha})^2+(\alpha+\overline{\alpha})-1=\alpha^2+\alpha+2 \alpha \overline{\alpha}-1+(\overline{\alpha})^2+\overline{\alpha}$
 $=\alpha^2+\alpha+2-1+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}=0$

(3) $72^{\circ} \times 5=360^{\circ}$ であるから, $\alpha=\cos 72^{\circ}+i \sin 72^{\circ}$ とすると, α は条件

$$\alpha^5=1, \alpha \neq 1$$

を満たす。

このとき $\overline{\alpha}=\cos 72^{\circ}-i \sin 72^{\circ}$

よって, $t=\alpha+\overline{\alpha}$ とすると $t=2 \cos 72^{\circ}$ であり, (2) から $t^2+t-1=0$ が満たされる。

$$t^2+t-1=0 \text { の解は } t=\frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4 \cdot 1 \cdot(-1)}}{2}=\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$t>0$ であるから $t=2 \cos 72^{\circ}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ゆえに $\cos 72^{\circ}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

第3講 例題演習

1

解答 (1) -64 (2) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} i$ (3) $-\frac{81}{2}+\frac{81 \sqrt{3}}{2} i$ (4) $-\frac{1}{32}+\frac{\sqrt{3}}{32} i$

解説

(1) $1+i=\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4}+i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$\begin{aligned} \text { 与式 } &=(\sqrt{2})^{12}\left(\cos \frac{\pi}{4}+i \sin \frac{\pi}{4}\right)^{12}=(\sqrt{2})^{12}(\cos 3 \pi+i \sin 3 \pi) \\ &=64(\cos \pi+i \sin \pi)=-64 \end{aligned}$$

(2) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} i=\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right)+i \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right)$ であるから

$$\begin{aligned} \text { 与式 } &=\left\{\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right)+i \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{-5} \\ &=\cos \frac{5}{3} \pi+i \sin \frac{5}{3} \pi=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} i \end{aligned}$$

(3) $\frac{3-\sqrt{3} i}{2}=\sqrt{3}\left\{\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right)+i \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$ であるから

$$\begin{aligned} \text { 与式 } &=(\sqrt{3})^8\left\{\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right)+i \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^8=(\sqrt{3})^8\left\{\cos \left(-\frac{4}{3} \pi\right)+i \sin \left(-\frac{4}{3} \pi\right)\right\} \\ &=81\left(\cos \frac{2}{3} \pi+i \sin \frac{2}{3} \pi\right)=-\frac{81}{2}+\frac{81 \sqrt{3}}{2} i \end{aligned}$$

(4) $-\sqrt{3}+i=2\left(\cos \frac{5}{6} \pi+i \sin \frac{5}{6} \pi\right)$ であるから

$$\begin{aligned} \text { 与式 } &=2^{-4}\left(\cos \frac{5}{6} \pi+i \sin \frac{5}{6} \pi\right)^{-4}=2^{-4}\left\{\cos \left(-\frac{10}{3} \pi\right)+i \sin \left(-\frac{10}{3} \pi\right)\right\} \\ &=\frac{1}{16}\left(\cos \frac{2}{3} \pi+i \sin \frac{2}{3} \pi\right) \\ &=\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} i\right)=-\frac{1}{32}+\frac{\sqrt{3}}{32} i \end{aligned}$$

2

解答 (1) 0 (2) 1

解説

(1) $\alpha^{17}=\cos 2 \pi+i \sin 2 \pi=1$ よって $\alpha^{17}-1=0$

左辺を因数分解すると $(\alpha-1)\left(\alpha^{16}+\alpha^{15}+\cdots+\alpha^2+\alpha+1\right)=0$

$\alpha=\cos \frac{2}{17} \pi+i \sin \frac{2}{17} \pi \neq 1$ から (与式) $=0$

(2) (与式) $=\alpha^{1+2+\cdots+16}=\alpha^{\frac{1}{2} \cdot 16(16+1)}=\alpha^{17 \times 8}=1$

3

解答 $z=\cos \theta \pm i \sin \theta$, 証明略

解説

$$z+\frac{1}{z}=2 \cos \theta \text { から } z^2+1=2 z \cos \theta$$

ゆえに $z^2-(2 \cos \theta) z+1=0$

よって $z=\cos \theta \pm \sqrt{\cos ^2 \theta-1}=\cos \theta \pm \sqrt{-\sin ^2 \theta}=\cos \theta \pm i \sin \theta$

$z=\cos \theta+i \sin \theta$ のとき

$$z^n+\frac{1}{z^n}=(\cos \theta+i \sin \theta)^n+(\cos \theta+i \sin \theta)^{-n}$$

第3講 例題演習

$$=(\cos n\theta + i\sin n\theta) + \{\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\} = 2\cos n\theta$$

$$z = \cos\theta - i\sin\theta \text{ すなわち } z = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \text{ のとき}$$

$$z^n + \frac{1}{z^n} = \{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}^n + \{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}^{-n}$$

$$= \{\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\} + \{\cos n\theta + i\sin n\theta\} = 2\cos n\theta$$

$$\text{以上から } z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$$

4

【解答】 $n=12$

【解説】

$-1+i$, $1+\sqrt{3}i$ をそれぞれ極形式で表すと

$$-1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i\sin \frac{3}{4}\pi \right),$$

$$1+\sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{よって } z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \cos \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right.$$

$$\left. + i\sin \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{5}{12}\pi + i\sin \frac{5}{12}\pi \right)$$

$$\text{ゆえに } z^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \left(\cos \frac{5}{12}n\pi + i\sin \frac{5}{12}n\pi \right)^n$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \left(\cos \frac{5}{12}n\pi + i\sin \frac{5}{12}n\pi \right)$$

$$z^n \text{ が実数となると } \sin \frac{5}{12}n\pi = 0 \quad \text{ゆえに } \frac{5}{12}n\pi = m\pi \text{ (} m \text{ は整数)}$$

$$\text{よって, 最小の正の整数 } n \text{ は } m=5 \text{ のとき } n=12$$

5

【解答】 $m=6$, $n=12$

【解説】

$$i - \sqrt{3} = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i\sin \frac{5}{6}\pi \right)$$

$$1+i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{ド・モアブルの定理から } (i - \sqrt{3})^m = 2^m \left(\cos \frac{5m}{6}\pi + i\sin \frac{5m}{6}\pi \right)$$

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n}{4}\pi + i\sin \frac{n}{4}\pi \right)$$

等式 $(i - \sqrt{3})^m = (1+i)^n$ の両辺の絶対値と偏角を比較して

$$2^m = 2^{\frac{n}{2}} \quad \dots\dots ①$$

$$\frac{5m}{6}\pi = \frac{n}{4}\pi + 2k\pi \text{ (} k \text{ は整数)} \quad \dots\dots ②$$

$$\text{① から } n=2m$$

$$\text{これを ② に代入して } \frac{5m}{6}\pi = \frac{m}{2}\pi + 2k\pi \quad \text{よって } m=6k$$

$$\text{これを満たす自然数 } m \text{ で最小のものは } m=6 \text{ である。このとき } n=12$$

6

$$\text{【解答】 (1) } z=3, -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i, -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$(2) z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$(3) z = i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad (4) z = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$(5) z = \sqrt{2} + \sqrt{6}i, -\sqrt{6} + \sqrt{2}i, -\sqrt{2} - \sqrt{6}i, \sqrt{6} - \sqrt{2}i$$

【解説】

$$(1) z \text{ の極形式を } z=r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \dots\dots ① \text{ とすると } z^3=r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

$$\text{また, } 27 \text{ を極形式で表すと } 27=27(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$\text{よって, 方程式は } r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 27(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$\text{両辺の絶対値と偏角を比較すると } r^3=27, 3\theta=0+2k\pi \text{ (} k \text{ は整数)}$$

$$r>0 \text{ であるから } r=3 \quad \dots\dots ② \quad \text{また } \theta = \frac{2k\pi}{3}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ の範囲では, } k=0, 1, 2 \text{ であるから } \theta=0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \quad \dots\dots ③$$

$$\text{②, ③ を ① に代入して, 求める解は } z=3, -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i, -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$(2) z \text{ の極形式を } z=r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \dots\dots ① \text{ とすると } z^6=r^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta)$$

$$\text{また, } -1 \text{ を極形式で表すと } -1=\cos\pi + i\sin\pi$$

$$\text{よって, 方程式は } r^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta) = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$\text{両辺の絶対値と偏角を比較すると } r^6=1, 6\theta=\pi+2k\pi \text{ (} k \text{ は整数)}$$

$$r>0 \text{ であるから } r=1 \quad \dots\dots ② \quad \text{また } \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ の範囲では, } k=0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ であるから}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi \quad \dots\dots ③$$

$$\text{②, ③ を ① に代入して, 求める解は}$$

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$(3) z \text{ の極形式を } z=r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \dots\dots ① \text{ とすると } z^3=r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

$$\text{また, } -i \text{ を極形式で表すと } -i = \cos \frac{3}{2}\pi + i\sin \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{よって, 方程式は } r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = \cos \frac{3}{2}\pi + i\sin \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{両辺の絶対値と偏角を比較すると } r^3=1, 3\theta = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \text{ (} k \text{ は整数)}$$

$$r>0 \text{ であるから } r=1 \quad \dots\dots ② \quad \text{また } \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ の範囲では, } k=0, 1, 2 \text{ であるから } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \quad \dots\dots ③$$

$$\text{②, ③ を ① に代入して, 求める解は } z=i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$(4) z \text{ の極形式を } z=r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \dots\dots ① \text{ とすると } z^2=r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

$$\text{また, } 1-\sqrt{3}i \text{ を極形式で表すと } 1-\sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i\sin \frac{5}{3}\pi \right)$$

$$\text{よって, 方程式は } r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = 2 \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i\sin \frac{5}{3}\pi \right)$$

$$\text{両辺の絶対値と偏角を比較すると } r^2=2, 2\theta = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \text{ (} k \text{ は整数)}$$

$$r>0 \text{ であるから } r=\sqrt{2} \quad \dots\dots ② \quad \text{また } \theta = \frac{5}{6}\pi + k\pi$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ の範囲では, } k=0, 1 \text{ であるから } \theta = \frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \quad \dots\dots ③$$

$$\text{②, ③ を ① に代入して, 求める解は } z = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$(5) z \text{ の極形式を } z=r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \dots\dots ① \text{ とすると } z^4=r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$$

$$\text{また, } -32(1+\sqrt{3}i) \text{ を極形式で表すと } -32(1+\sqrt{3}i) = 64 \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i\sin \frac{4}{3}\pi \right)$$

$$\text{よって, 方程式は } r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 64 \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i\sin \frac{4}{3}\pi \right)$$

$$\text{両辺の絶対値と偏角を比較すると } r^4=64, 4\theta = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \text{ (} k \text{ は整数)}$$

$$r>0 \text{ であるから } r=2\sqrt{2} \quad \dots\dots ② \quad \text{また } \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ の範囲では, } k=0, 1, 2, 3 \text{ であるから}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi \quad \dots\dots ③$$

$$\text{②, ③ を ① に代入して, 求める解は}$$

$$z = \sqrt{2} + \sqrt{6}i, -\sqrt{6} + \sqrt{2}i, -\sqrt{2} - \sqrt{6}i, \sqrt{6} - \sqrt{2}i$$

7

$$\text{【解答】 (ア) } 5 \quad (\text{イ}) 1 \quad (\text{ウ}) 1 \quad (\text{エ}) -1 \quad (\text{オ}) \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

【解説】

$$z^n = (\cos 72^\circ + i\sin 72^\circ)^n = \cos(72^\circ \times n) + i\sin(72^\circ \times n)$$

$$\text{よって } z^n=1 \text{ を満たす最小の自然数 } n \text{ は, } 72^\circ \times n = 360^\circ \text{ を解いて } n=5$$

$$\text{したがって, } z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0, z \neq 1 \text{ から,}$$

$$z \text{ は } z^4+z^3+z^2+z+1=0 \quad \dots\dots ① \text{ の解である。}$$

$$z \neq 0 \text{ であるから, ① の両辺を } z^2 \text{ で割ると } \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + \left(z + \frac{1}{z} \right) + 1 = 0$$

$$\text{ゆえに } (w^2-2) + w + 1 = 0 \text{ すなわち } w^2 + w - 1 = 0 \quad \dots\dots ②$$

$$\text{また } w = z + \frac{1}{z} = (\cos 72^\circ + i\sin 72^\circ) + (\cos 72^\circ - i\sin 72^\circ)$$

$$= 2\cos 72^\circ > 0$$

$$\text{したがって, ② から } w = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ゆえに } \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

第3講 レベルA

1

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) ド・モアブルの定理により

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また $(\cos \theta + i \sin \theta)^2$

$$= \cos^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta + i^2 \sin^2 \theta$$

$$= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + i(2 \sin \theta \cos \theta) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① と ② の実部と虚部を比較して

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

(2) ド・モアブルの定理により

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

また $(\cos \theta + i \sin \theta)^3$

$$= \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \cdot i \sin \theta + 3 \cos \theta \cdot i^2 \sin^2 \theta + i^3 \sin^3 \theta$$

$$= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + 3i \sin \theta \cos^2 \theta - i \sin^3 \theta$$

$$= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) + 3i \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) - i \sin^3 \theta$$

$$= (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + i(3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta) \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③ と ④ の実部と虚部を比較して

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta, \quad \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

2

【解答】 -1

【解説】

$$\alpha^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}, \quad \beta^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \quad \text{であるから} \quad \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{2}, \quad \alpha^2 - \beta^2 = 1$$

$$\text{また} \quad \alpha\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2} \times \frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって} \quad \frac{\alpha+i\beta}{\alpha-i\beta} = \frac{(\alpha+i\beta)^2}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{(\alpha^2-\beta^2)+2\alpha\beta i}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\text{ゆえに} \quad \left(\frac{\alpha+i\beta}{\alpha-i\beta} \right)^{2004} = \left\{ \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^4 \right\}^{501} = (-1)^{501} = -1$$

3

【解答】 m を自然数とすると

$$n=3m \text{ のとき } 2, \quad n=3m-1, \quad 3m-2 \text{ のとき } -1$$

【解説】

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)^n + \left\{ \cos \left(-\frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{2}{3}\pi \right) \right\}^n \\ &= \left(\cos \frac{2n\pi}{3} + i \sin \frac{2n\pi}{3} \right) + \left\{ \cos \left(-\frac{2n\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2n\pi}{3} \right) \right\} \\ &= 2 \cos \frac{2n\pi}{3} \end{aligned}$$

よって, m を自然数として

$$n=3m \text{ のとき } 2$$

$$n=3m-1, \quad 3m-2 \text{ のとき } -1$$

4

$$\text{【解答】} \quad (1) \quad z + \frac{1}{z} = 2, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (2) \quad \cos \frac{4}{5}\pi = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

【解説】

$$(1) \quad z^5 = 1 \text{ から} \quad (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

$$[1] \quad z=1 \text{ のとき} \quad z + \frac{1}{z} = 2$$

$$[2] \quad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \text{ のとき} \quad z \neq 0 \text{ であるから,}$$

$$\text{両辺を } z^2 \text{ で割ると} \quad z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + \left(z + \frac{1}{z} \right) - 1 = 0$$

$$\text{よって} \quad z + \frac{1}{z} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$[1], [2] \text{ から} \quad z + \frac{1}{z} = 2, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(2) z は 1 の 5 乗根であるから

$$z = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5} \quad (k=0, 1, 2, 3, 4)$$

$$k=2 \text{ のとき} \quad z = \cos \frac{4}{5}\pi + i \sin \frac{4}{5}\pi \text{ であり}$$

$$z + \frac{1}{z} = \left(\cos \frac{4}{5}\pi + i \sin \frac{4}{5}\pi \right) + \left(\cos \frac{4}{5}\pi - i \sin \frac{4}{5}\pi \right) = 2 \cos \frac{4}{5}\pi$$

$$\cos \frac{4}{5}\pi < 0 \text{ であるから, (1) より} \quad 2 \cos \frac{4}{5}\pi = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{よって} \quad \cos \frac{4}{5}\pi = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

5

【解答】 略

【解説】

解を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ [$r > 0$] とおく

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$\text{また} \quad 1 = \cos 0 + i \sin 0$$

$$\text{ゆえに} \quad r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = \cos 0 + i \sin 0$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると $r^n = 1, \quad n\theta = 0 + 2\pi \times k \quad (k \text{ は整数})$

$r > 0$ であるから $r = 1$

$$\text{また} \quad \theta = \frac{2\pi}{n} \times k$$

$$\text{よって} \quad z = \cos \left(\frac{2\pi}{n} \times k \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{n} \times k \right) = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k = \omega^k$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると $k=0, 1, 2, \dots, n-1$

したがって, $z^n=1$ の解は $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ で表される。

第3講 レベルB

1

$$\text{【解答】} \quad (1) \quad \text{実部は} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta, \quad \text{虚部は} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \quad (2) \quad \text{略}$$

【解説】

(1) $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ から

$$z + \frac{1}{z} = r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) = \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta$$

$$\text{よって, 実部は} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta, \quad \text{虚部は} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta$$

(2) $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ から

$$z^n + \frac{1}{z^n} = \left(r^n + \frac{1}{r^n} \right) \cos n\theta + i \left(r^n - \frac{1}{r^n} \right) \sin n\theta$$

$$[1] \quad z + \frac{1}{z} \text{ が実数のとき}$$

$$\left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta = 0 \text{ から} \quad r=1 \quad \text{または} \quad \sin \theta = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad r=1 \quad \text{または} \quad \theta = m\pi \quad (m \text{ は整数})$$

$$r=1 \text{ のとき} \quad r^n - \frac{1}{r^n} = 0, \quad \theta = m\pi \text{ のとき} \quad \sin n\theta = 0$$

$$\text{よって, } z^n + \frac{1}{z^n} \text{ は実数。}$$

$$[2] \quad z + \frac{1}{z} \text{ が純虚数のとき}$$

$$\left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta = 0 \quad \text{かつ} \quad \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \neq 0$$

$$\text{ゆえに} \quad r \neq 1 \quad \text{かつ} \quad \theta = \frac{2m+1}{2}\pi \quad (m \text{ は整数})$$

$$n \text{ が偶数のとき} \quad \sin n\theta = \sin \frac{2m+1}{2}n\pi = 0$$

$$\text{よって, } z^n + \frac{1}{z^n} \text{ は実数。}$$

$$n \text{ が奇数のとき} \quad \cos n\theta = \cos \frac{2m+1}{2}n\pi = 0$$

$$\sin n\theta = \sin \frac{2m+1}{2}n\pi \neq 0$$

$$\text{よって, } z^n + \frac{1}{z^n} \text{ は純虚数。}$$

[1], [2] から, 題意は示された。

2

【解答】 1

【解説】

$|z|=1$ であるから, $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とおける。

$$z^n + 1 = (\cos n\theta + 1) + i \sin n\theta$$

$$|z^n + 1| = 1 \text{ のとき} \quad (\cos n\theta + 1)^2 + \sin^2 n\theta = 1$$

$$\text{ゆえに} \quad 2 + 2 \cos n\theta = 1 \quad \text{よって} \quad \cos n\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ゆえに} \quad n\theta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

第3講 レベルB

よって $\theta = \frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}$, $\theta = \frac{4\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}$ ($k=0, 1, \dots, n-1$)

$$\begin{aligned} \text{ここで } & \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right\} \\ & \times \left\{ \cos\left(\frac{4\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right\} \\ & = \cos\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{4k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{4k\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

ゆえに、求める複素数を w とすると

$$w = \cos\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{4k\pi}{n}\right)\right\} + i\sin\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{4k\pi}{n}\right)\right\}$$

$$\text{ここで } \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{4k\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1}(1+2k) = \frac{2\pi}{n} \cdot \left\{n+2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}\right\} = 2n\pi$$

したがって $w = \cos 2n\pi + i\sin 2n\pi = 1$

[3]

$$\text{[解答]} \quad (1) \quad n=5 \quad (2) \quad 0 \quad (3) \quad 1 \quad (4) \quad -\frac{1}{2}$$

[解説]

$$(1) \quad \text{ド・モアブルの定理により} \quad z^n = \cos \frac{2n\pi}{5} + i\sin \frac{2n\pi}{5}$$

$$z^n = 1 \text{ の両辺の偏角を比較すると } \frac{2n\pi}{5} = 2m\pi \quad (m \text{ は整数})$$

$$\text{すなわち} \quad n=5m \quad \text{これを満たす最小の正の整数 } n \text{ は} \quad n=5$$

$$(2) \quad (1) \text{ より } z^5 = 1 \quad \text{すなわち} \quad z^5 - 1 = 0$$

$$\text{左辺を因数分解して} \quad (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$$

$$z \neq 1 \text{ であるから} \quad z^4+z^3+z^2+z+1=0$$

$$(3) \quad (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)=(1+z+z^2+z^3)(1+z^4+z^8+z^{12})$$

$$\text{ここで, } z^5=1 \text{ から } z^8=z^5z^3=z^3, \quad z^{12}=(z^5)^2z^2=z^2$$

$$\text{これと } z^4+z^3+z^2+z+1=0 \text{ から}$$

$$\begin{aligned} (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8) &= (1+z+z^2+z^3)(1+z^4+z^3+z^2) \\ &= (-z^4)(-z) = z^5 = 1 \end{aligned}$$

$$(4) \quad k=1, 2, 3, 4 \text{ に対して} \quad z^k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i\sin \frac{2k\pi}{5}$$

$$\text{これと } z^4+z^3+z^2+z+1=0 \text{ から}$$

$$\begin{aligned} & \left(\cos \frac{8\pi}{5} + i\sin \frac{8\pi}{5}\right) + \left(\cos \frac{6\pi}{5} + i\sin \frac{6\pi}{5}\right) \\ & + \left(\cos \frac{4\pi}{5} + i\sin \frac{4\pi}{5}\right) + \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i\sin \frac{2\pi}{5}\right) = -1 \end{aligned}$$

$$\text{両辺の実部を比較して} \quad \cos \frac{8\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} = -1$$

$$\text{ここで, } \cos \frac{8\pi}{5} = \cos \frac{2\pi}{5}, \quad \cos \frac{6\pi}{5} = \cos \frac{4\pi}{5} \text{ であるから}$$

$$2\left(\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}\right) = -1$$

$$\text{よって } \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{[別解]} \quad (3) \quad k=1, 2, 3, 4 \text{ に対して} \quad (z^k)^5 = (z^5)^k = 1$$

$$z^k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i\sin \frac{2k\pi}{5}$$

よって、 z, z^2, z^3, z^4 は相異なる 1 の 5 乗根で、1 と異なるから、これらは 4 次方程式 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ の 4 つの解である。

ゆえに、 $(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)=x^4+x^3+x^2+x+1$ は x についての恒等式である。

$$\text{これに } x=-1 \text{ を代入すると} \quad (-1-z)(-1-z^2)(-1-z^3)(-1-z^4)=1$$

$$\text{すなわち} \quad (1+z)(1+z^2)(1+z^3)(1+z^4)=1$$

$$z^8=z^5z^3=z^3 \text{ であるから} \quad (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)=1$$

[4]

$$\text{[解答]} \quad (1) \quad \text{略} \quad (2) \quad \beta + \overline{\beta} = -1, \quad \beta \overline{\beta} = 2 \quad (3) \quad \frac{\sqrt{7}}{2}$$

[解説]

$$\begin{aligned} (1) \quad \overline{\alpha} &= \cos \theta - i\sin \theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(2\pi - \theta) + i\sin(2\pi - \theta) \\ &= \cos 6\theta + i\sin 6\theta = (\cos \theta + i\sin \theta)^6 = \alpha^6 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \alpha \text{ は 1 の 7 乗根であるから} \quad \alpha^7 = 1$$

$$\alpha^7 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) \text{ で, } \alpha \neq 1 \text{ であるから}$$

$$\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

$$\text{また, (1) と同様に考えると, } \overline{\alpha^2} = \alpha^5, \quad \overline{\alpha^4} = \alpha^3 \text{ が導かれる。}$$

$$\text{ゆえに} \quad \overline{\beta} = \overline{\alpha} + \overline{\alpha^2} + \overline{\alpha^4} = \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3$$

$$\text{したがって} \quad \beta + \overline{\beta} = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3 = -1$$

$$\begin{aligned} \text{また} \quad \beta \overline{\beta} &= (\alpha + \alpha^2 + \alpha^4)(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3) \\ &= \alpha^7 + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^8 + \alpha^7 + \alpha^5 + \alpha^{10} + \alpha^9 + \alpha^7 \\ &= 3 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 \\ &= 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta \text{ は, } \beta \text{ の虚部を表す。}$$

$$(2) \text{ より, } \beta \text{ は } x^2+x+2=0 \text{ の解である。}$$

$$\text{これを解いて} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

$$\sin 2\theta > 0, \quad \sin 4\theta + \sin \theta = 2\sin \frac{5}{2}\theta \cos \frac{3}{2}\theta > 0 \text{ であるから}$$

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta > 0$$

$$\text{したがって} \quad \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

[5]

$$\text{[解答]} \quad (1) \quad z = 2\left(\cos \frac{2}{5}\pi + i\sin \frac{2}{5}\pi\right), \quad 2\left(\cos \frac{4}{5}\pi + i\sin \frac{4}{5}\pi\right), \quad 2\left(\cos \frac{6}{5}\pi + i\sin \frac{6}{5}\pi\right), \\ 2\left(\cos \frac{8}{5}\pi + i\sin \frac{8}{5}\pi\right)$$

$$\begin{aligned} (2) \quad z &= \cos \frac{2}{9}\pi + i\sin \frac{2}{9}\pi, \quad \cos \frac{4}{9}\pi + i\sin \frac{4}{9}\pi, \quad \cos \frac{8}{9}\pi + i\sin \frac{8}{9}\pi, \\ & \cos \frac{10}{9}\pi + i\sin \frac{10}{9}\pi, \quad \cos \frac{14}{9}\pi + i\sin \frac{14}{9}\pi, \quad \cos \frac{16}{9}\pi + i\sin \frac{16}{9}\pi \end{aligned}$$

[解説]

$$(1) \quad \text{両辺を 16 で割ると} \quad \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{z}{2} + 1 = 0$$

$$\frac{z}{2} = w \text{ とおくと} \quad w^4 + w^3 + w^2 + w + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$\text{ここで} \quad w^5 - 1 = (w - 1)(w^4 + w^3 + w^2 + w + 1) = 0$$

よって、方程式①の解は、方程式 $w^5=1$ の虚数解である。

$$\text{したがって} \quad w = \cos \frac{2k\pi}{5} + i\sin \frac{2k\pi}{5} \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

$z=2w$ であるから、求める解は

$$\begin{aligned} z &= 2\left(\cos \frac{2}{5}\pi + i\sin \frac{2}{5}\pi\right), \quad 2\left(\cos \frac{4}{5}\pi + i\sin \frac{4}{5}\pi\right), \\ & 2\left(\cos \frac{6}{5}\pi + i\sin \frac{6}{5}\pi\right), \quad 2\left(\cos \frac{8}{5}\pi + i\sin \frac{8}{5}\pi\right) \end{aligned}$$

$$(2) \quad z^6 + z^3 + 1 = 0 \text{ から} \quad (z^3)^2 + z^3 + 1 = 0$$

$$z^3 \text{ について解くと} \quad z^3 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\text{方程式の解 } z \text{ の極形式を} \quad z = r(\cos \theta + i\sin \theta) \quad \cdots \cdots \text{①} \text{ とすると}$$

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

$$[1] \quad z^3 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ のとき} \quad \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{2}{3}\pi + i\sin \frac{2}{3}\pi \text{ であるから}$$

$$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = \cos \frac{2}{3}\pi + i\sin \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{両辺の絶対値と偏角を比較すると} \quad r^3 = 1, \quad 3\theta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$$r > 0 \text{ であるから} \quad r = 1 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{また} \quad \theta = \frac{2}{9}\pi + \frac{2k\pi}{3}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ の範囲で考えると, } k=0, 1, 2 \text{ であるから}$$

$$\theta = \frac{2}{9}\pi, \quad \frac{8}{9}\pi, \quad \frac{14}{9}\pi \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$\text{②, ③ を ① に代入すると}$$

$$z = \cos \frac{2}{9}\pi + i\sin \frac{2}{9}\pi, \quad \cos \frac{8}{9}\pi + i\sin \frac{8}{9}\pi, \quad \cos \frac{14}{9}\pi + i\sin \frac{14}{9}\pi$$

$$[2] \quad z^3 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ のとき} \quad \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{4}{3}\pi + i\sin \frac{4}{3}\pi \text{ であるから}$$

$$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = \cos \frac{4}{3}\pi + i\sin \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{両辺の絶対値と偏角を比較すると} \quad r^3 = 1, \quad 3\theta = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$$r > 0 \text{ であるから} \quad r = 1 \quad \cdots \cdots \text{④}$$

$$\text{また} \quad \theta = \frac{4}{9}\pi + \frac{2k\pi}{3}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ の範囲で考えると, } k=0, 1, 2 \text{ であるから}$$

$$\theta = \frac{4}{9}\pi, \quad \frac{10}{9}\pi, \quad \frac{16}{9}\pi \quad \cdots \cdots \text{⑤}$$

$$\text{④, ⑤ を ① に代入すると}$$

$$z = \cos \frac{4}{9}\pi + i\sin \frac{4}{9}\pi, \quad \cos \frac{10}{9}\pi + i\sin \frac{10}{9}\pi, \quad \cos \frac{16}{9}\pi + i\sin \frac{16}{9}\pi$$

[1], [2] から、求める解は

$$z = \cos \frac{2}{9}\pi + i\sin \frac{2}{9}\pi, \quad \cos \frac{4}{9}\pi + i\sin \frac{4}{9}\pi, \quad \cos \frac{8}{9}\pi + i\sin \frac{8}{9}\pi,$$

$$\cos \frac{10}{9}\pi + i\sin \frac{10}{9}\pi, \quad \cos \frac{14}{9}\pi + i\sin \frac{14}{9}\pi, \quad \cos \frac{16}{9}\pi + i\sin \frac{16}{9}\pi$$

第4講 例題

1

解答 (1) 順に $3+i$, $-1-7i$ (2) $\frac{15}{4}i$ (3) $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}i$

解説

(1) 点 C を表す複素数は $\frac{2 \cdot (2-i) + 1 \cdot (5+5i)}{1+2} = 3+i$

点 D を表す複素数は $\frac{-2 \cdot (2-i) + 1 \cdot (5+5i)}{1-2} = -1-7i$

(2) 点 G を表す複素数は $\frac{(3+i) + (-1-7i) + \frac{15}{4}i}{3} = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}i$

(3) $E(ki)$ (k は実数) とすると

$$\begin{aligned} AE^2 &= |ki - (2-i)|^2 = |(-2) + (k+1)i|^2 \\ &= (k+1)^2 + 4 = k^2 + 2k + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BE^2 &= |ki - (5+5i)|^2 = |(-5) + (k-5)i|^2 \\ &= (k-5)^2 + 25 = k^2 - 10k + 50 \end{aligned}$$

$$AE = BE \text{ より } AE^2 = BE^2 \text{ であるから}$$

$$k^2 + 2k + 5 = k^2 - 10k + 50$$

$$\text{整理すると } 12k = 45 \quad \text{よって } k = \frac{15}{4}$$

したがって、求める複素数は $\frac{15}{4}i$

2

解答 (1) 2点 1, i を結ぶ線分の垂直二等分線 (2) 点 $1-i$ を中心とする半径 2 の円

解説

(1) 点 z 全体は、2点 1, i を結ぶ線分の垂直二等分線。

(2) 点 z 全体は、点 $1-i$ を中心とする半径 2 の円。

3

解答 点 $2i$ を中心とする半径 2 の円

解説

方程式の両辺を平方すると $4|z-i|^2 = |z+2i|^2$

$$\text{ゆえに } 4(z-i)(\overline{z-i}) = (z+2i)(\overline{z+2i})$$

$$\text{よって } 4(z-i)(\overline{z+i}) = (z+2i)(\overline{z-2i})$$

$$\text{両辺を展開して整理すると } z\overline{z} + 2iz - 2i\overline{z} = 0$$

$$\text{ゆえに } (z-2i)(\overline{z+2i}) - 4 = 0$$

$$\text{よって } (z-2i)(\overline{z-2i}) = 4$$

$$\text{すなわち } |z-2i|^2 = 2^2$$

$$\text{よって } |z-2i| = 2$$

したがって、点 z の全体は、点 $2i$ を中心とする半径 2 の円である。

4

解答 点 2 を中心とする半径 2 の円

解説

点 z は中心 O, 半径 2 の円上にあるから $|z| = 2$ …… ①

$$w = \frac{z+2}{z-1} \text{ から } (z-1)w = z+2$$

$$\text{よって } (w-1)z = w+2$$

$$w=1 \text{ は等式を満たさないから, } w \neq 1 \text{ で } z = \frac{w+2}{w-1}$$

$$\text{① に代入して } \left| \frac{w+2}{w-1} \right| = 2 \quad \text{ゆえに } |w+2| = 2|w-1|$$

$$\text{両辺を 2 乗すると } |w+2|^2 = 4|w-1|^2$$

$$\text{よって } (w+2)(\overline{w+2}) = 4(w-1)(\overline{w-1})$$

$$\text{両辺を展開して整理すると } w\overline{w} - 2(w+\overline{w}) = 0 \quad \text{ゆえに } (w-2)(\overline{w-2}) = 4$$

$$\text{すなわち } |w-2|^2 = 2^2 \quad \text{よって } |w-2| = 2$$

したがって、点 w は、点 2 を中心とする半径 2 の円を描く。

参考 $|w+2| = 2|w-1|$ であるから、点 w の軌跡はアポロニウスの円 (2点 -2, 1 からの距離の比が 2 : 1) であることがわかる。

5

解答 最大値 5

解説

点 z が原点を中心とし、半径が 2 の円上を動くから、 $|z| = 2$ と表される。

$$\text{また, } w = \frac{2z-i}{z+i} \text{ から } (z+i)w = 2z-i$$

$$\text{よって } (w-2)z = -i(w+1)$$

$$\text{ゆえに } z = \frac{-i(w+1)}{w-2}$$

$$\text{これを } |z| = 2 \text{ に代入すると } \left| \frac{-i(w+1)}{w-2} \right| = 2$$

$$\text{よって } |-i||w+1| = 2|w-2|$$

$$|w+1|^2 = 4|w-2|^2$$

$$(w+1)(\overline{w+1}) = 4(w-2)(\overline{w-2})$$

$$\text{展開して整理すると } w\overline{w} - 3w - 3\overline{w} + 5 = 0$$

$$\text{ゆえに } (w-3)(\overline{w-3}) = 4$$

$$\text{よって } |w-3| = 2$$

したがって、 w は点 3 を中心とし、半径が 2 の円上を動く。

右の図から $|w| \leq 3+2=5$

等号が成り立つのは $w=5$ のときである。

よって、 $w=5$ のとき $|w|$ は最大値 5 をとる。

6

解答 点 $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ を中心とする半径 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の円。ただし、原点を除く

解説

$$\alpha = \frac{(1-i)(z+1)}{z} \quad (z \neq 0) \text{ とおくと, } \alpha \text{ が実数である条件は}$$

$$\overline{\alpha} = \alpha \text{ から } \frac{(1+i)(\overline{z}+1)}{\overline{z}} = \frac{(1-i)(z+1)}{z}$$

$$\text{分母を払って整理すると } 2iz\overline{z} + (1+i)z - (1-i)\overline{z} = 0$$

$$\text{ゆえに } z\overline{z} + \frac{1-i}{2}z + \frac{1+i}{2}\overline{z} = 0$$

$$\text{これを変形すると } \left(z + \frac{1+i}{2}\right)\left(\overline{z} + \frac{1-i}{2}\right) = \frac{1+i}{2} \cdot \frac{1-i}{2}$$

$$\text{よって } \left(z + \frac{1+i}{2}\right)\overline{\left(z + \frac{1+i}{2}\right)} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに } \left|z + \frac{1+i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

したがって、 z は、点 $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ を中心とする半径 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の円を描く。

ただし、 $z \neq 0$ であるから、原点を除く。

7

解答 点 $\frac{1}{4}$ を中心とする半径 $\frac{3}{4}$ の円を描く。ただし、点 1 を除く

解説

$$w = \frac{z+1}{z-2} \text{ から } (w-1)z = 2w+1$$

$$\frac{z+1}{z-2} = 1 \text{ を満たす } z \text{ は存在しないから } w \neq 1$$

$$\text{したがって } z = \frac{2w+1}{w-1}$$

$$\text{点 } z \text{ が虚軸上を動くとき } z + \overline{z} = 0$$

$$\text{よって } \frac{2w+1}{w-1} + \frac{2\overline{w}+1}{\overline{w}-1} = 0$$

$$\text{ゆえに } (\overline{w}-1)(2w+1) + (w-1)(2\overline{w}+1) = 0$$

$$\text{整理すると } w\overline{w} - \frac{1}{4}w - \frac{1}{4}\overline{w} - \frac{1}{2} = 0$$

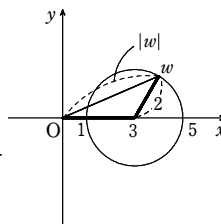
$$\text{よって } \left(w - \frac{1}{4}\right)\left(\overline{w} - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{16}$$

$$\text{すなわち } \left(w - \frac{1}{4}\right)\overline{\left(w - \frac{1}{4}\right)} = \frac{9}{16}$$

$$\text{よって } \left|w - \frac{1}{4}\right|^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\text{ゆえに } \left|w - \frac{1}{4}\right| = \frac{3}{4}$$

したがって、点 w は点 $\frac{1}{4}$ を中心とする半径 $\frac{3}{4}$ の円を描く。ただし、点 1 を除く。



第4講 例題演習

1

【解答】 (1) 順に $\frac{21}{5} + \frac{8}{5}i$, $9 + 16i$ (2) $3 + \frac{4}{3}i$ (3) $4 + i$

【解説】

(1) 点 D を表す複素数は

$$\frac{3 \cdot (5 + 4i) + 2 \cdot (3 - 2i)}{2 + 3} = \frac{21}{5} + \frac{8}{5}i$$

点 E を表す複素数は

$$\frac{-3 \cdot (5 + 4i) + 2 \cdot (3 - 2i)}{2 - 3} = 9 + 16i$$

(2) 点 G を表す複素数は

$$\frac{(5 + 4i) + (3 - 2i) + (1 + 2i)}{3} = 3 + \frac{4}{3}i$$

(3) 点 P ($a + bi$) (a, b は実数) とすると

$$\begin{aligned} \text{AP}^2 &= |(a + bi) - (5 + 4i)|^2 = |(a - 5) + (b - 4)i|^2 \\ &= (a - 5)^2 + (b - 4)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BP}^2 &= |(a + bi) - (3 - 2i)|^2 = |(a - 3) + (b + 2)i|^2 \\ &= (a - 3)^2 + (b + 2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CP}^2 &= |(a + bi) - (1 + 2i)|^2 = |(a - 1) + (b - 2)i|^2 \\ &= (a - 1)^2 + (b - 2)^2 \end{aligned}$$

AP = BP より AP² = BP² であるから

$$(a - 5)^2 + (b - 4)^2 = (a - 3)^2 + (b + 2)^2$$

整理すると $a + 3b = 7$ …… ①

BP = CP より BP² = CP² であるから

$$(a - 3)^2 + (b + 2)^2 = (a - 1)^2 + (b - 2)^2$$

整理すると $a - 2b = 2$ …… ②

①, ② を解くと $a = 4, b = 1$

したがって、求める点 P を表す複素数は $4 + i$

2

【解答】 (1) 点 3 を中心とする半径 1 の円 (2) 点 $-2i$ を中心とする半径 2 の円
(3) 点 1 を中心とする半径 2 の円 (4) 点 $-2, i$ を結ぶ線分の垂直二等分線
(5) 点 $-2 - 5i, 1 - 3i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

【解説】

(1) 点 3 を中心とする半径 1 の円

(2) 点 $-2i$ を中心とする半径 2 の円

(3) $(z - 1)(\overline{z} - 1) = 4$ より $|z - 1|^2 = 2^2$
よって $|z - 1| = 2$

したがって 点 1 を中心とする半径 2 の円

(4) 点 $-2, i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

(5) $|z - (-2 - 5i)| = |z - (1 - 3i)|$
よって 点 $-2 - 5i, 1 - 3i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

3

【解答】 (1) 点 -1 を中心とする半径 3 の円 (2) 点 $5i$ を中心とする半径 6 の円

【解説】

(1) 方程式の両辺を平方すると $9|z|^2 = |z - 8|^2$

ゆえに $9z\overline{z} = (z - 8)(\overline{z} - 8)$ よって $9z\overline{z} = (z - 8)(\overline{z} - 8)$

両辺を展開して整理すると $z\overline{z} + z + \overline{z} = 8$

ゆえに $(z + 1)(\overline{z} + 1) - 1 = 8$ よって $(z + 1)(\overline{z} + 1) = 9$

すなわち $|z + 1|^2 = 3^2$ よって $|z + 1| = 3$

ゆえに、点 z の全体は、点 -1 を中心とする半径 3 の円である。

【別解】 1. A(0), B(8), P(z) とすると、方程式は $3\text{AP} = \text{BP}$

ゆえに $\text{AP} : \text{BP} = 1 : 3$

線分 AB を 1 : 3 に内分する点を C(α), 外分する点を D(β) とすると

$$\alpha = \frac{3 \cdot 0 + 1 \cdot 8}{1 + 3} = 2, \beta = \frac{-3 \cdot 0 + 1 \cdot 8}{1 - 3} = -4$$

よって、点 z の全体は、点 2, -4 を直径の両端とする円。

【別解】 2. $z = x + yi$ (x, y は実数) とおくと、 $9|z|^2 = |z - 8|^2$ から

$$9(x^2 + y^2) = (x - 8)^2 + y^2$$

展開して整理すると $x^2 + 2x + y^2 - 8 = 0$ 変形すると $(x + 1)^2 + y^2 = 3^2$

よって、点 z の全体は、点 -1 を中心とする半径 3 の円。

(2) 方程式の両辺を平方すると $4|z + 4i|^2 = 9|z - i|^2$

ゆえに $4(z + 4i)(\overline{z} + 4i) = 9(z - i)(\overline{z} - i)$

よって $4(z + 4i)(\overline{z} - 4i) = 9(z - i)(\overline{z} + i)$

両辺を展開して整理すると $z\overline{z} + 5iz - 5i\overline{z} = 11$

ゆえに $(z - 5i)(\overline{z} + 5i) - 25 = 11$ よって $(z - 5i)(\overline{z} - 5i) = 36$

すなわち $|z - 5i|^2 = 6^2$ よって $|z - 5i| = 6$

ゆえに、点 z の全体は、点 $5i$ を中心とする半径 6 の円である。

【別解】 1. A($-4i$), B(i), P(z) とすると、方程式は $2\text{AP} = 3\text{BP}$

ゆえに $\text{AP} : \text{BP} = 3 : 2$

線分 AB を 3 : 2 に内分する点を C(α), 外分する点を D(β) とすると

$$\alpha = \frac{2 \cdot (-4i) + 3 \cdot i}{3 + 2} = -i, \beta = \frac{-2 \cdot (-4i) + 3 \cdot i}{3 - 2} = 11i$$

よって、点 z の全体は、点 $-i, 11i$ を直径の両端とする円。

【別解】 2. $z = x + yi$ (x, y は実数) とおくと、 $4|z + 4i|^2 = 9|z - i|^2$ から

$$4[x^2 + (y + 4)^2] = 9[x^2 + (y - 1)^2]$$

展開して整理すると $x^2 + y^2 - 10y - 11 = 0$ 変形すると $x^2 + (y - 5)^2 = 6^2$

よって、点 z の全体は、点 $5i$ を中心とする半径 6 の円。

4

【解答】 (1) 点 $2i$ を中心とする半径 2 の円 (2) 点 $-2i$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円

(3) 原点 O を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円

【解説】

点 z が原点中心、半径 2 の円上を動くから $|z| = 2$ …… ①

(1) $w = z + 2i$ から $z = w - 2i$

これを ① に代入すると $|w - 2i| = 2$

よって、点 w は 点 $2i$ を中心とする半径 2 の円 を描く。

(2) $w = (1 - i)z - 2i$ から $z = \frac{w + 2i}{1 - i}$

これを ① に代入すると $\left| \frac{w + 2i}{1 - i} \right| = 2$

ゆえに $|w + 2i| = 2|1 - i|$

$|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ であるから $|w + 2i| = 2\sqrt{2}$

よって、点 w は 点 $-2i$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円 を描く。

(3) $w = \frac{1}{z}$ から $z = \frac{1}{w}$

これを ① に代入すると $\left| \frac{1}{w} \right| = 2$ ゆえに $|w| = \frac{1}{2}$

よって、点 w は 原点 O を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円 を描く。

5

【解答】 中心が点 i , 半径 1 の円 ; $z = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ のとき最大値 2

【解説】

$(z - 1 - i)w = z - i$ から $(w - 1)z = w + (w - 1)i$

$w \neq 1$ であるから $z = \frac{w}{w - 1} + i$ …… ①

$|z| = 1$ から $z\overline{z} = 1$ に代入して $\left(\frac{w}{w - 1} + i \right) \left(\frac{\overline{w}}{\overline{w} - 1} - i \right) = 1$

よって $w\overline{w} + \{\overline{w}(w - 1) - w(\overline{w} - 1)\}i = 0$ ゆえに $w\overline{w} + (w - \overline{w})i = 0$

$(w - i)(\overline{w} - i) = 1$ から $|w - i| = 1$

よって、点 w の描く曲線は中心が点 i , 半径 1 の円である。

これより、 $|w|$ が最大となるのは、点 $0, w$ を結ぶ線分が円の直径となるときである。

ゆえに、 $w = 2i$ のとき最大で、最大値は 2 である。

① に $w = 2i$ を代入すると $z = \frac{2i}{2i - 1} + i = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

6

【解答】 点 $1 + i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円。ただし、点 2 を除く。

【解説】

$\frac{(i - 1)z}{i(z - 2)}$ は実数であるから

$$\frac{\overline{\left(\frac{(i - 1)z}{i(z - 2)} \right)}}{\frac{(i - 1)z}{i(z - 2)}} = \frac{(i - 1)z}{i(z - 2)}$$

よって $\frac{(-i - 1)\overline{z}}{-i(\overline{z} - 2)} = \frac{(i - 1)z}{i(z - 2)}$

ゆえに $(-i - 1)\overline{z}i(z - 2) = -(i - 1)zi(\overline{z} - 2)$

展開して整理すると $z\overline{z} + (i - 1)z - (i + 1)\overline{z} = 0$ ($z \neq 2$)

よって $\{z - (i + 1)\}[\overline{z} - (-i + 1)] = 2$ より $\{z - (i + 1)\}[\overline{z} - (\overline{i + 1})] = 2$

ゆえに $|z - (i + 1)|^2 = 2$

したがって $|z - (i + 1)| = \sqrt{2}$

よって、点 z は、中心が点 $1 + i$, 半径が $\sqrt{2}$ の円。ただし、点 2 を除く。

(検討) 点 2 を除くのは、与式の分母を 0 とする場合であるからである。

7

【解答】 点 $\frac{1}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円 ただし、点 1 を除く

【解説】

$w = \frac{z}{z + 1}$ から $(1 - w)z = w$

$\frac{z}{z+1}=1$ を満たす z は存在しないから $w \neq 1$

したがって $z=\frac{w}{1-w}$

z が虚軸上を動くとき $z+\overline{z}=0$

よって $\frac{w}{1-w}+\frac{\overline{w}}{1-\overline{w}}=0$

ゆえに $w(1-\overline{w})+\overline{w}(1-w)=0$

整理すると $w\overline{w}-\frac{1}{2}w-\frac{1}{2}\overline{w}=0$

よって $\left(w-\frac{1}{2}\right)\left(\overline{w}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

すなわち $\left(w-\frac{1}{2}\right)\left(\overline{w}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

よって $\left|w-\frac{1}{2}\right|^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ゆえに $\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$

したがって、点 w は

点 $\frac{1}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円を描く。ただし、点1を除く。

1

(解答) (1) $(2a-x)+(2b-y)i$ (2) $-i, -2+3i, 4+i$

(解説)

(1) $Q(X+Yi)$ (X, Y は実数)とすると、点Aは線分PQの中点であるから

$$\frac{(x+yi)+(X+Yi)}{2}=a+bi$$

すなわち $\frac{x+X}{2}+\frac{y+Y}{2}i=a+bi$

よって $\frac{x+X}{2}=a, \frac{y+Y}{2}=b$

したがって $X=2a-x, Y=2b-y$

点Qを表す複素数は $(2a-x)+(2b-y)i$

(2) 三角形の3つの頂点を表す複素数を z_1, z_2, z_3 とし、 $\frac{z_1+z_2}{2}=-1+i,$

$\frac{z_2+z_3}{2}=1+2i, \frac{z_3+z_1}{2}=2$ とすると

$z_1+z_2=-2+2i$ …… ①

$z_2+z_3=2+4i$ …… ②

$z_3+z_1=4$ …… ③

辺々加えると $2(z_1+z_2+z_3)=4+6i$

よって $z_1+z_2+z_3=2+3i$ …… ④

①, ④ から $z_3=4+i$

②, ④ から $z_1=-i$

③, ④ から $z_2=-2+3i$

したがって、求める複素数は $-i, -2+3i, 4+i$

2

(解答) (1) 2点 $-\frac{1}{2}, \frac{i}{2}$ を結ぶ線分の垂直二等分線

(2) 点 $-3+4i$ を中心とする半径2の円 (3) 点 $-\frac{2}{3}$ を中心とする半径1の円

(4) 点 $2i$ を通り、虚軸に垂直な直線

(解説)

(1) 方程式を変形すると $\left|z+\frac{1}{2}\right|=\left|z-\frac{i}{2}\right|$

よって、点 z の全体は 2点 $-\frac{1}{2}, \frac{i}{2}$ を結ぶ線分の垂直二等分線

(2) 方程式を変形すると $|z-(-3+4i)|=2$

よって、点 z の全体は 点 $-3+4i$ を中心とする半径2の円

(3) 方程式から $(3z+2)(\overline{3z+2})=9$ よって $|3z+2|^2=3^2$

ゆえに $|3z+2|=3$ したがって $\left|z-\left(-\frac{2}{3}\right)\right|=1$

よって、点 z の全体は 点 $-\frac{2}{3}$ を中心とする半径1の円

(4) $z=x+yi$ (x, y は実数)とおくと $\overline{z}=x-yi$

これらを方程式に代入して $(x+yi)-(x-yi)=4i$

よって、 $2yi=4i$ から $y=2$ ゆえに $z=x+2i$

z の虚部は常に2であるから、点 z の全体は

点 $2i$ を通り、虚軸に垂直な直線

3

(解答) (1) 点2を中心とする半径2の円 (2) 点 $-i$ を中心とする半径3の円

(3) 点 $2i$ を中心とする半径3の円の内部 ただし、境界線を含まない

(4) A $(-5+2i)$, B (-7) とすると、線分ABの垂直二等分線および垂直二等分線で分けられる平面の点Bを含む部分

(解説)

(1) 方程式の両辺を2乗すると $4|z-1|^2=|z+2|^2$

よって $4(z-1)(\overline{z-1})=(z+2)(\overline{z+2})$

ゆえに $4(z-1)(\overline{z}-1)=(z+2)(\overline{z}+2)$

展開して整理すると $z\overline{z}-2z-2\overline{z}=0$

式を変形すると $(z-2)(\overline{z}-2)=4$

よって $(z-2)(\overline{z-2})=4$ すなわち $|z-2|^2=4$

したがって $|z-2|=2$

よって、点 z 全体は 点2を中心とする半径2の円

(2) 方程式の両辺を2乗すると $|z-5i|^2=|i+2\overline{z}|^2$

よって $(z-5i)(\overline{z-5i})=(i+2\overline{z})(\overline{i+2\overline{z}})$

ゆえに $(z-5i)(\overline{z}+5i)=(i+2\overline{z})(-i+2z)$

展開して整理すると $z\overline{z}-iz+i\overline{z}-8=0$

式を変形すると $(z+i)(\overline{z}-i)=9$

よって $(z+i)(\overline{z+i})=9$ すなわち $|z+i|^2=9$

したがって $|z+i|=3$

よって、点 z 全体は 点 $-i$ を中心とする半径3の円

(3) $|z-2i|<3$ を満たす点 z 全体は

点 $2i$ を中心とする半径3の円の内部。ただし、境界線を含まない。

(4) $|z+5-2i|\geq|z+7|$ から

$|z-(-5+2i)|\geq|z-(-7)|$ …… ①

A $(-5+2i)$, B (-7) , P (z) とすると、①は $AP\geq BP$ を表す。

方程式 $|z-(-5+2i)|=|z-(-7)|$ を満たす点 z 全体は、線分ABの垂直二等分線であるから、点 z 全体は、

線分ABの垂直二等分線および垂直二等分線で分けられる平面の点Bを含む部分

4

(解答) (1) 2点 $-1, 1$ を結ぶ線分の垂直二等分線、すなわち、虚軸

(2) 原点を中心とする半径1の円。ただし、点1を除く

(解説)

$w=\frac{z-i}{z+i}$ から $w(z+i)=z-i$

ゆえに $(w-1)z=-i(w+1)$

$\frac{z-i}{z+i}=1$ を満たす z は存在しないから $w \neq 1$

したがって $z=\frac{-i(w+1)}{w-1}$ …… ①

(1) 点 z が複素数平面の原点を中心とした半径1の円周上(ただし、 $z=-i$ を除く)を動くから $|z|=1$

①を代入して $\left|\frac{-i(w+1)}{w-1}\right|=1$

$$\text{ゆえに } \frac{|w+1|}{|w-1|}=1 \quad \text{よって} \quad |w+1|=|w-1|$$

したがって、点 w は、2点 $-1, 1$ を結ぶ線分の垂直二等分線、すなわち、虚軸を描く。

$$(2) \text{ 点 } z \text{ が実軸上を動くことから} \quad z = \bar{z}$$

① より

$$\bar{z} = \left[\frac{-i(w+1)}{w-1} \right] = \frac{-i \cdot \overline{w+1}}{\overline{w-1}} = \frac{i(\bar{w}+1)}{\bar{w}-1}$$

$$\text{であるから} \quad \frac{-i(w+1)}{w-1} = \frac{i(\bar{w}+1)}{\bar{w}-1}$$

$$\text{ゆえに} \quad -(w+1)(\bar{w}-1) = (\bar{w}+1)(w-1)$$

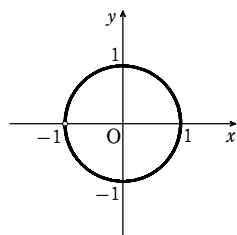
$$\text{両辺を展開して整理すると} \quad w\bar{w} = 1$$

$$\text{よって} \quad |w|=1$$

したがって、点 w は原点を中心とする半径1の円を描く。ただし、点1を除く。

5

【解答】 [図] 最大値 $\sqrt{2}+1$ 、最小値 $\sqrt{2}-1$



解説

$$w = \frac{z+1}{1-z} \text{ から} \quad w(1-z) = z+1$$

$$\text{すなわち} \quad (w+1)z = w-1 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$w = -1$ とすると、(①の左辺)=0、(①の右辺)=-2となり、矛盾する。

$$\text{よって} \quad w \neq -1 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{したがって、} w+1 \neq 0 \text{ であるから、①の両辺を } w+1 \text{ で割ると} \quad z = \frac{w-1}{w+1}$$

$$z \text{ は虚軸上にあるから} \quad z + \bar{z} = 0$$

$$\text{ゆえに、} \frac{w-1}{w+1} + \left(\frac{w-1}{w+1} \right) = 0 \text{ であるから} \quad \frac{w-1}{w+1} + \frac{\bar{w}-1}{\bar{w}+1} = 0$$

両辺に $(w+1)(\bar{w}+1)$ を掛けると

$$(w-1)(\bar{w}+1) + (\bar{w}-1)(w+1) = 0$$

$$2w\bar{w} - 2 = 0$$

$$|w|^2 = 1$$

$$\text{よって} \quad |w|=1$$

これと ② から、 w が描く図形を複素数平面上に図示すると、右の図ようになる。

$|w+i+1| = |w - (-1-i)|$ であるから、 $|w+i+1|$ は、点 w と点 $-1-i$ の距離に等しい。

$$\text{また} \quad |-1-i| = \sqrt{2}$$

$|w+i+1|$ が最大となるのは、 w が右の図においてAの位置にあるときであるから、求める最大値は

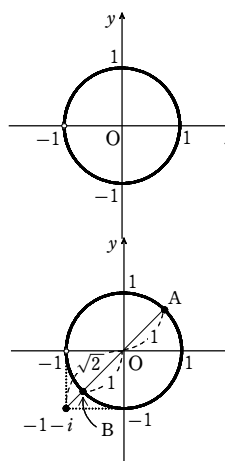
$$\sqrt{2}+1$$

$|w+i+1|$ が最小となるのは、 w が右の図においてBの位置にあるときであるから、求める最小値は

$$\sqrt{2}-1$$

$$\text{【参考】 } |w+i+1| \text{ が最大となるとき} \quad w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

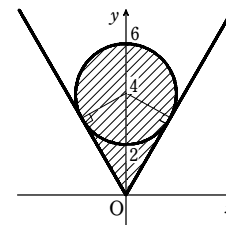
$$|w+i+1| \text{ が最小となるとき} \quad w = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$



1

【解答】 (1) [図] 境界線上の点を含む。

$$(2) \quad 60^\circ \leq \arg w \leq 120^\circ$$



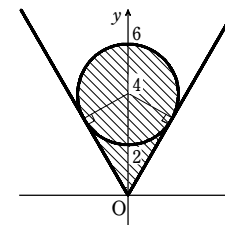
解説

(1) $P(z), Q(w), O(0)$ とする。

P は中心が点2、半径1の円の内部または円周上を動く。また、点 Q は点 z を点 O の周りに 90° 回転し、 a 倍 ($OQ = aOP$) した点である。

よって、点 Q は中心が点 $2ai$ 、半径 a の円の内部または円周上を動き、 $a=0$ のときは原点、 $a=2$ のときは中心が点 $4i$ 、半径2の円となる。

$0 \leq a \leq 2$ から、 w の存在範囲は右図のようになる。ただし、境界線上の点を含む。



$$\text{【別解】 [1] } a \neq 0 \text{ のとき} \quad z = \frac{w}{ia} \quad |z-2| \leq 1 \text{ に代入して} \quad \left| \frac{w}{ia} - 2 \right| \leq 1$$

$$|i|=1 \text{ であるから} \quad |w-2ai| \leq a$$

$$[2] \quad a=0 \text{ のとき} \quad w=0$$

$$[1], [2] \text{ から、} 0 \leq a \leq 2 \text{ で } a \text{ を動かすと} \quad w=0 \text{ から} |w-4i| \leq 2 \text{ まで動く。}$$

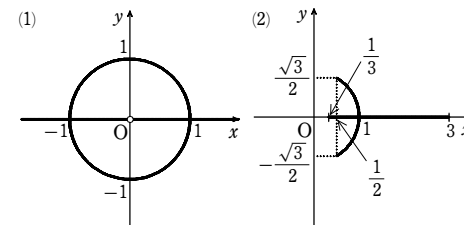
(2) (1)の図から、 w が境界線の2直線の線分上にあるときに、偏角は最大または最小となる。

$C(4i)$ 、接点を T とすると $OC=4, CT=2, \angle CTO=90^\circ$ であるから $\angle COT=30^\circ$

$$\text{よって} \quad 60^\circ \leq \arg w \leq 120^\circ$$

2

【解答】 (1) [図] (2) [図] (1)



解説

第4講 レベルB

(1) w が実数であるから $w = \overline{w}$

$$\text{よって } z + \frac{1}{z} = \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}} \text{ から } (z - \overline{z}) \left(1 - \frac{1}{z\overline{z}} \right) = 0$$

$$\text{ゆえに } z = \overline{z}, |z| = 1$$

$$\text{条件から } z \neq 0$$

したがって、右の図のようになる。

(2) [1] $z = \overline{z}, z \neq 0$ のとき

$$z \text{ は実数で, } 1 \leq z + \frac{1}{z} \leq \frac{10}{3}$$

$$z > 0 \text{ のとき } z \leq z^2 + 1 \leq \frac{10}{3}z$$

$$z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

$$z^2 - \frac{10}{3}z + 1 \leq 0 \text{ から } \left(z - \frac{1}{3} \right) (z - 3) \leq 0$$

$$\text{よって } \frac{1}{3} \leq z \leq 3$$

$$z < 0 \text{ のとき } -\frac{10}{3}z \leq z^2 + 1 \leq z$$

$$z^2 - z + 1 > 0 \text{ から, これは成り立たない。}$$

[2] $|z| = 1$ のとき

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \quad (-\pi \leq \theta < \pi) \text{ とおくと}$$

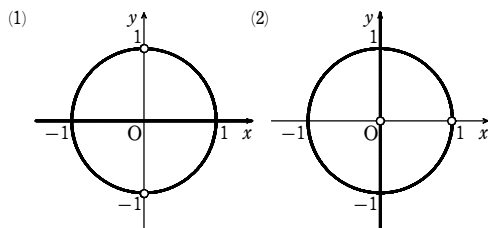
$$z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta \text{ であるから } 1 \leq 2 \cos \theta \leq \frac{10}{3}$$

$$\text{よって } \frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq 1 \text{ から } -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

以上から、右の図のようになる。

[3]

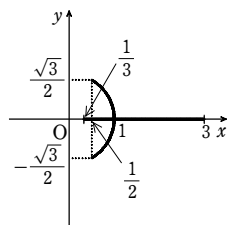
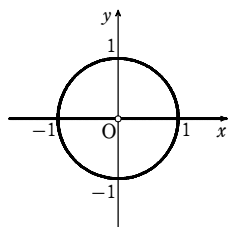
解答 (1) [図] 点 $i, -i$ を除く (2) [図] 点 $0, 1$ を除く



解説

(1) $z + i \neq 0$ かつ $z - i \neq 0$ から $z \neq \pm i$

$$\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} = \frac{2z}{z^2+1}$$



これが実数のとき, $\frac{2z}{z^2+1} = \overline{\left(\frac{2z}{z^2+1} \right)}$ が成り立つ。

$$\text{ゆえに } \frac{2z}{z^2+1} = \frac{2\overline{z}}{(\overline{z})^2+1}$$

$$\text{すなわち } \overline{z}|z|^2 + z - z|z|^2 - \overline{z} = 0$$

$$(z - \overline{z})(|z|^2 - 1) = 0$$

$$\text{よって } z = \overline{z} \text{ または } |z| = 1$$

$$\text{したがって, } z \text{ は実数 または } |z| = 1$$

(ただし, $z \neq \pm i$)

よって、求める図形は右の図のようになる。ただし、点 $i, -i$ を除く。

(2) $w = \frac{z+i}{z-i}$ から $z = \frac{w+1}{w-1}i$ ($w \neq 1$)

[1] $z = \overline{z}$ のとき

$$\frac{w+1}{w-1}i = \overline{\left(\frac{w+1}{w-1}i \right)} \text{ から } \frac{w+1}{w-1}i = \frac{\overline{w}+1}{\overline{w}-1}(-i)$$

$$\text{ゆえに } (w+1)(\overline{w}-1) + (\overline{w}+1)(w-1) = 0$$

$$\text{よって } |w|^2 - w + \overline{w} - 1 + |w|^2 - \overline{w} + w - 1 = 0$$

$$\text{すなわち } |w| = 1 \quad (w \neq 1)$$

よって、点 w は点 O を中心とする半径 1 の円周上を動く。ただし、点 1 を除く。

[2] $|z| = 1$ のとき

$$z \neq \pm i \text{ から } w \neq 0$$

$$\left| \frac{w+1}{w-1}i \right| = 1 \text{ から } |w+1| = |w-1|$$

よって、点 w は 2 点 $-1, 1$ を結ぶ線分の垂直二等分線、すなわち虚軸上を動く。ただし、点 0 を除く。

[1], [2] から、求める図形は右の図のようになる。

ただし、点 $0, 1$ を除く。

[4]

解答 (1) $\angle APB = \frac{\pi}{4}$ (2) $t = 28$

解説

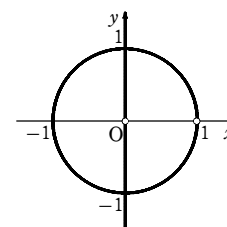
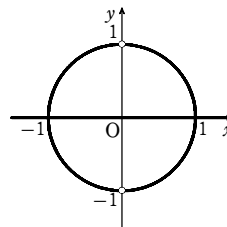
(1) $A(\alpha), B(\beta), P(\gamma)$ とする。

$$\begin{aligned} \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} &= \frac{7 + 7i - \frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}}{6 - \frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}} = \frac{(7+7i)((1-i)t-7) - 14(t-3)}{6((1-i)t-7) - 14(t-3)} \\ &= \frac{-7 - 49i}{-8t - 6ti} = \frac{7(1+7i)}{2t(4+3i)} = \frac{7}{2t} \cdot \frac{(1+7i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} \\ &= \frac{7}{2t}(1+i) = \frac{7}{\sqrt{2}t} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$t \text{ は正の実数であるから } \angle \alpha \gamma \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{したがって } \angle APB = \frac{\pi}{4}$$

$$(2) \frac{\beta - 0}{\alpha - 0} = \frac{7 + 7i - 0}{6 - 0} = \frac{7}{6}(1+i) = \frac{7\sqrt{2}}{6} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$



$$\text{よって, } \angle \alpha \beta = \frac{\pi}{4} \text{ であるから } \angle AOB = \frac{\pi}{4}$$

ゆえに、点 P, O は直線 AB に関して同じ側にあり

$$\angle AOB = \angle APB$$

であるから、円周角の定理の逆により、 4 点 O, A, B, P は同一円周上にある。

$$\text{この円の中心を } Q(z) \text{ とすると } \angle AQB = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{よって } (7+7i) - z = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) (6-z)$$

$$\text{したがって } z = \frac{7+i}{1-i} = \frac{(7+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 3+4i$$

$P(w)$ とすると、線分 OP の長さが最大となるのは、 OP が円の直径となるときで

$$w = 2z = 6+8i$$

$$\text{よって, } \frac{14(t-3)}{(1-i)t-7} = 6+8i \text{ から } 7(t-3) = ((t-7)-ti)(3+4i)$$

$$\text{ゆえに } (t-28)i = 0$$

$$t \text{ は正の実数であるから } t = 28$$