
第4章

～ 三角関数 ～

第1講 三角関数のグラフ

第1節 三角関数

1 角の拡張

① 一般角

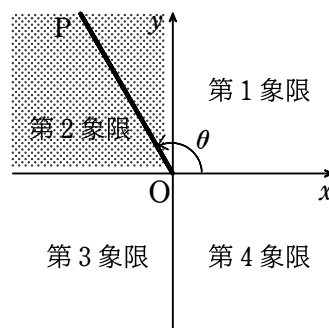
1 動径の表す角 (度数法)

動径 OP と始線 OX のなす角の1つを α とすると、動径 OP の表す角は

$$\alpha + 360^\circ \times n \quad (n \text{ は整数})$$

2 象限と一般角

点 O を原点とする座標平面上では、 x 軸の正の部分に始線 OX にとって、一般角 θ を考える。
たとえば、 θ が右の図のようなとき、 θ の動径は第2象限にあるという。なお、動径 OP が座標軸上にあるときは、どの象限にあるともいえない。



② 弧度法

$$1 \text{ ラジアン} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ, \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ラジアン}, \quad \pi \text{ ラジアン} = 180^\circ$$

〔注〕 弧度法では、単位のリジアンを省略するのがふつうである。

2 動径の表す角 (弧度法)

動径 OP と始線 OX のなす角の1つを α とすると、動径 OP の表す角は

$$\alpha + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

3 扇形の弧の長さ and 面積

半径 r 、中心角 θ (ラジアン) の扇形の弧の長さ l 、面積 S は

$$l = r\theta, \quad S = \frac{1}{2}r^2\theta \quad \text{または} \quad S = \frac{1}{2}lr$$

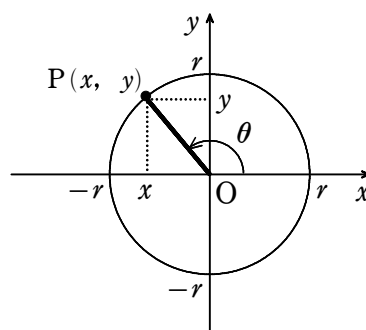
〔注〕 角の単位はラジアンを用いる。

2 三角関数

① 三角関数

一般角 θ の動径と、原点を中心とする半径 r の円との交点を $P(x, y)$ とすると

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$



② 弧度法

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1, \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1,$$

$\tan \theta$ の値の範囲は実数全体

③ 三角関数の相互関係

$$1 \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad 2 \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad 3 \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

第1講 三角関数のグラフ

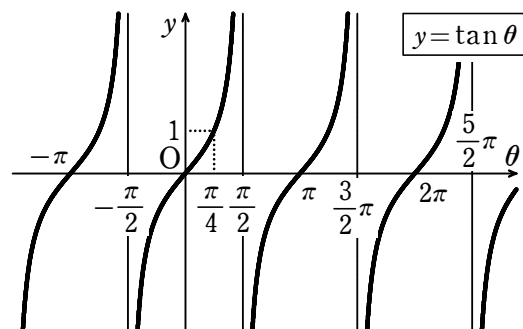
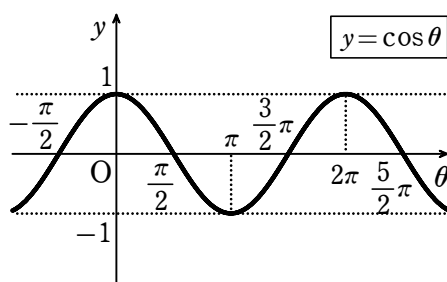
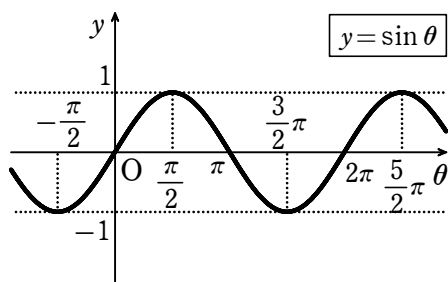
3 三角関数のグラフ

1 三角関数のグラフ

$y = \sin \theta$ 周期は 2π , 原点に関して対称

$y = \cos \theta$ 周期は 2π , y 軸に関して対称

$y = \tan \theta$ 周期は π , 原点に関して対称



2 いろいろな三角関数のグラフ

$y = \sin(\theta - \alpha)$ $y = \sin \theta$ のグラフを, θ 軸方向に α だけ平行移動したもの。

k を正の定数とすると

$y = k \sin \theta$ $y = \sin \theta$ のグラフを, θ 軸をもとにして y 軸方向へ k 倍したもの。

$y = \sin k\theta$ $y = \sin \theta$ のグラフを, y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\frac{1}{k}$ 倍したもの。

$y = \sin k\theta$, $y = \cos k\theta$ の周期は $\frac{2\pi}{k}$, $y = \tan k\theta$ の周期は $\frac{\pi}{k}$

第1講 三角関数のグラフ

4 三角関数の性質

① 三角関数で成り立つ等式

1 n を整数とすると

$$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta, \quad \cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta, \quad \tan(\theta + n\pi) = \tan \theta$$

2 $\sin(-\theta) = -\sin \theta, \quad \cos(-\theta) = \cos \theta, \quad \tan(-\theta) = -\tan \theta$

参考 グラフの対称性 一般に、関数 $y = f(x)$ について

[1] 常に $f(-x) = -f(x)$ である $\iff$ グラフは原点に関して対称

[2] 常に $f(-x) = f(x)$ である $\iff$ グラフは y 軸に関して対称

3 $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta, \quad \cos(\theta + \pi) = -\cos \theta, \quad \tan(\theta + \pi) = \tan \theta$

4 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta, \quad \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta, \quad \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \theta}$

5 $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta, \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta, \quad \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$

6 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$

第1講 例題

1 ★☆☆

次の角を、度数は弧度に、弧度は度数に、それぞれ書き直せ。

(1) 60°

(2) 390°

(3) -615°

(4) $\frac{\pi}{4}$

(5) $-\frac{7}{6}\pi$

(6) $\frac{23}{3}\pi$

2 ★☆☆

θ が次の値のとき、 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ。

(1) $\frac{8}{3}\pi$

(2) $-\frac{9}{4}\pi$

3 ★☆☆

$\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ のうち、1つが次のように与えられたとき、他の2つの値を求めよ。

(1) $\cos \theta = -\frac{2}{3} \quad \left(\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi\right)$

(2) $\tan \theta = -1 \quad \left(\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi\right)$

4 ★★★

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\sin \theta \cos \theta$, $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

(2) $\sin \theta - \cos \theta \quad \left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$

5 ★☆☆

次の関数のグラフをかけ。また、その周期をいえ。

(1) $y = \sin \theta + 1$

(2) $y = 3\cos \theta$

(3) $y = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

(4) $y = \tan \frac{\theta}{3}$

6 ★★★

関数 $y = 2\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ のグラフをかけ。

7 ★☆☆

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。また、 θ の範囲に制限がないときの解を求めよ。

(1) $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

第1講 例題

8★★☆

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $2\cos\theta \leq -\sqrt{2}$

(2) $-\sqrt{2}\sin\theta + 1 \geq 0$

(3) $\sqrt{3}\tan\theta - 1 < 0$

第1講 例題演習

1

次の角を，度数は弧度に，弧度は度数に直せ。

- | | | | |
|----------------------|----------------------|-----------------------|----------------|
| (1) 30° | (2) 45° | (3) 60° | (4) 90° |
| (5) $\frac{3}{2}\pi$ | (6) $\frac{3}{4}\pi$ | (7) $\frac{2}{15}\pi$ | (8) 2π |

2

θ が次の値のとき， $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ ， $\tan \theta$ の値を求めよ。

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| (1) $\frac{23}{6}\pi$ | (2) $-\frac{5}{4}\pi$ |
|-----------------------|-----------------------|

3

次の値を求めよ。

- | |
|--|
| (1) $\pi < \theta < 2\pi$ ， $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ のとき $\sin \theta$ ， $\tan \theta$ |
| (2) θ の動径が第3象限にあり， $\tan \theta = 4$ のとき $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ |

4

- | |
|---|
| (1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき， $\sin \theta \cos \theta$ ， $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ の値を求めよ。 |
| (2) $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき， $\sin \theta \cos \theta$ ， $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$ の値を求めよ。 |

5

次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

- | | |
|---|---------------------------|
| (1) $y = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ | (2) $y = \sin \theta + 2$ |
| (3) $y = 2\tan \theta$ | (4) $y = \cos 2\theta$ |

6

次の関数の周期を求めよ。また，そのグラフをかけ。

- | | | |
|--|---|---|
| (1) $y = \cos\left(3\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ | (2) $y = \tan\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ | (3) $y = 2\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 1$ |
|--|---|---|

第 1 講 例題演習

7

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。また、 θ の範囲に制限がないときの解を求めよ。

(1) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\cos \theta = -1$

(4) $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(5) $2\cos \theta + 1 = 0$

(6) $\tan \theta + 1 = 0$

8

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解け。

(1) $\sqrt{2} \sin \theta + 1 \geq 0$

(2) $2\cos \theta - \sqrt{3} < 0$

(3) $\tan \theta + 1 \geq 0$

第1講 レベルA

1

次のような扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

(1) 半径 6, 中心角 $\frac{\pi}{4}$

(2) 半径 8, 中心角 $\frac{5}{6}\pi$

2 [芝浦工業大]

周囲の長さが 12 cm の扇形は、半径が^ア cm, 中心角が^イ ラジアン
のとき面積が最大になり、その値は^ウ cm^2 である。

3

次の式を簡単にせよ。

(1) $\cos \theta + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\theta + \pi) + \cos\left(\theta + \frac{3}{2}\pi\right)$

(2) $\sin(\theta + \pi) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cos(-\theta)$

4

(1) 等式 $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ を証明せよ。

(2) $\cos^2 \theta + \sin \theta - \tan \theta (1 - \sin \theta) \cos \theta$ を計算せよ。

5

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ とする。 $\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{4}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\sin \theta - \cos \theta$

(2) $\sin \theta, \cos \theta$

6 [慶応義塾大]

x についての 2 次方程式 $8x^2 - 4x - a = 0$ (a は定数) の 2 つの解は $\sin \theta, \cos \theta$ である。

このとき、 a の値は^ア であり、 $\frac{\sin^2 \theta + 1}{\cos \theta} + \frac{\cos^2 \theta + 1}{\sin \theta}$ の値は^イ である。

第1講 レベルB

1 [摂南大]

関数 $\sin x$ の増減を考えて、4つの数 $\sin 0$, $\sin 1$, $\sin 2$, $\sin 3$ の大小関係を調べよ。

2 [自治医科大]

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき、 $\frac{5(\sin^5 \theta + \cos^5 \theta)}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta} - 2(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)$ の値を求めよ。

3

$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \frac{11}{16}$ のとき、 $\sin \theta + \cos \theta$ の値を求めよ。

4

$0 \leq x < 2\pi$, $0 \leq y < 2\pi$ のとき、連立方程式 $\begin{cases} \cos x - \sin y = 1 \\ \cos y + \sin x = -\sqrt{3} \end{cases}$ を解け。

5 [甲南大]

次の式の値は θ に無関係な定数であることを証明せよ。

$$\sin^2 \theta + \sin^2 \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \theta \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$

6 [湘南工科大]

(1) 関数 $f(\theta) = 2\sin 3\theta + 1$ の周期は π であり、 $f(\theta)$ の最大値は 1 である。

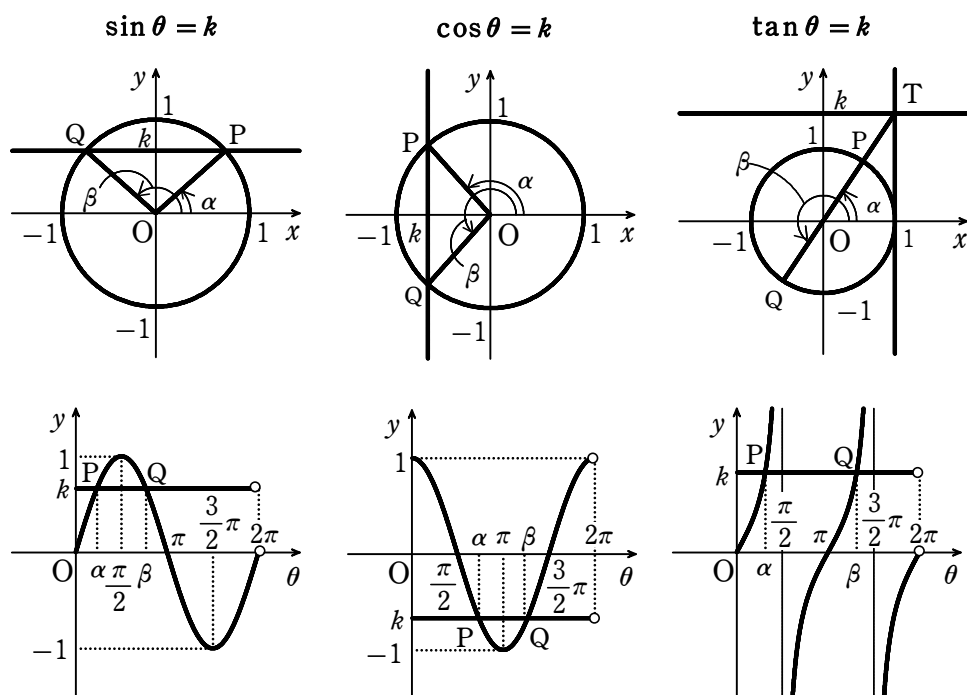
(2) 関数 $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{3}$ の周期のうち、正で最小のものを求めよ。

第2講 三角関数の応用

5 三角関数の応用

1 三角関数を含む方程式，不等式

三角関数を含む方程式，不等式は，単位円やグラフを利用して解く。



2 三角関数を含む関数の最大値，最小値

- 1 三角関数を t で置き換え， t の関数とみて，最大値，最小値を求める。
- 2 $\sin \theta = t$ ， $\cos \theta = t$ など置き換えたときは， θ の範囲に注意して， t のとりうる値の範囲を考える。

第2講 例題

1 ★★☆☆

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

$$(1) \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$(2) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(3) \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(4) \tan\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

2 ★★★★★

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解け。

$$(1) \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(2) \tan\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) > 1$$

$$(3) \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3 ★★☆☆

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

$$(1) 2\sin^2\theta - \cos\theta = 2$$

$$(2) 2\cos^2\theta - \sqrt{3}\sin\theta + 1 = 0$$

$$(3) 5\cos\theta + 2\sin^2\theta \geq -1$$

$$(4) \sin^2\theta - \cos^2\theta + \sin\theta < 0$$

4 ★★☆☆

次の関数の最大値、最小値を求めよ。また、そのときの θ の値を求めよ。

$$(1) y = \sin\theta - 2 \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

$$(2) y = 3\cos\theta + 1 \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

$$(3) y = 2\sin\theta - 1 \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$(4) y = -\tan\theta + 1 \quad \left(-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

5 ★★☆☆

関数 $y = 2\cos^2\theta - 2\sin\theta + 1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の最大値、最小値を求めよ。また、そのときの θ の値を求めよ。

第2講 例題演習

1

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

(1) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(4) $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = -1$

(5) $\tan\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

(6) $\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解け。

(1) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) > 1$

(3) $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$

(5) $\tan\left(2\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \leq -\sqrt{3}$

(6) $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}$

3

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

(1) $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

(2) $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$

(3) $2\cos^2\theta + \sin\theta - 2 \leq 0$

(4) $2\sin\theta \tan\theta = -3$

4

次の関数の最大値と最小値、およびそのときの θ の値を求めよ。

(1) $y = 2\cos\theta - 3 \left(\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{7}{6}\pi \right)$

(2) $y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \left(0 \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi \right)$

(3) $y = \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \left(\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$

(4) $y = \tan\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right)$

5

関数 $y = \cos^2\theta + \sin\theta - 1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの θ の値を求めよ。

第2講 レベルA

1

- (1) $0 \leq \theta < 2\pi$ の条件で、等式 $\cos^2 \theta + \sqrt{3} \sin \theta \cos \theta = 1$ を満たす θ の値を求めよ。
- (2) $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$ のとき、 $2\cos \theta - 3\tan \theta > 0$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

2

関数 $y = -\sin^2 \theta - \cos \theta$ $\left(\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi\right)$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

3

$y = 2a\cos \theta + 2 - \sin^2 \theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ の最大値を a の式で表せ。

第2講 レベルB

1

θ に関する方程式 $2\cos^2\theta - \sin\theta - a - 1 = 0$ の解の個数を、定数 a の値の範囲によって調べよ。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

2

θ の方程式 $2\cos^2\theta + 2k\sin\theta + k - 5 = 0$ を満たす θ があるような定数 k の値の範囲を求めよ。

3

すべての θ に対して次の不等式が成り立つように、定数 k の値の範囲を定めよ。

$$2\sin^2\theta + 4k\cos\theta + 3k - 4 \leq 0$$

第3講 加法定理

第2節 加法定理

6 三角関数の加法定理

[1] 正弦, 余弦の加法定理

$$1 \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$2 \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$3 \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$4 \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

[2] 正接の加法定理

$$5 \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$6 \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

[3] 2直線のなす角

直線 $y = mx$ と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると $\tan \theta = m$

参考 一般に, 交わる2直線 $y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$ が垂直でないとき, そのな

$$\text{す鋭角を } \theta \text{ とすると } \tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

[4] 点の回転 **研究**

点 $P(a, b)$ を, 原点 O を中心として θ だけ回転した位置にある点 $Q(x, y)$ について, $OP = r$, 動径 OP と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると

$$x = r \cos(\alpha + \theta) = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta = a \cos \theta - b \sin \theta$$

$$y = r \sin(\alpha + \theta) = r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta = b \cos \theta + a \sin \theta$$

7 加法定理の応用

[1] 2倍角の公式

$$1 \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$2 \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$3 \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

参考 3倍角の公式

$$1 \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$2 \quad \cos 3\alpha = -3 \cos \alpha + 4 \cos^3 \alpha$$

[2] 半角の公式

$$1 \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$2 \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$3 \quad \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

第3講 例題

1 ★☆☆

加法定理を用いて、次の値を求めよ。

(1) $\sin 75^\circ$ (2) $\tan 15^\circ$ (3) $\cos \frac{\pi}{12}$

2 ★☆☆

α は鋭角, β は鈍角とする。次の式の値を求めよ。

(1) $\sin \alpha = \frac{1}{3}, \cos \beta = -\frac{2}{5}$ のとき $\sin(\alpha - \beta), \cos(\alpha + \beta)$

(2) $\tan \alpha = 1, \tan \beta = -2$ のとき $\tan(\alpha + \beta), \tan(\alpha - \beta)$

3 ★★★

2 直線 $x - 2y + 4 = 0, 3x - y - 3 = 0$ のなす角 θ を求めよ。ただし, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

4 ★☆☆

$\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi, \sin \alpha = -\frac{1}{5}$ のとき, $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \tan 2\alpha$ の値を求めよ。

5 ★★★

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 次の方程式, 不等式を解け。

(1) $\sin 2\theta = \cos \theta$ (2) $\cos 2\theta - 3\cos \theta + 2 \geq 0$

6 ★★★

$0 < \alpha < \pi, \cos \alpha = -\frac{3}{5}$ のとき $\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}, \tan \frac{\alpha}{2}$ の値を求めよ。

第3講 例題演習

1

加法定理を用いて、次の値を求めよ。

(1) $\sin 15^\circ$ (2) $\tan 75^\circ$ (3) $\cos \frac{\pi}{12}$

2

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ とする。次の値を求めよ。

(1) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \beta = \frac{2}{5}$ のとき $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$
(2) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{5}{13}$ のとき $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$
(3) $\tan \alpha = -2$, $\tan \beta = 1$ のとき $\tan(\alpha + \beta)$, $\tan(\alpha - \beta)$

3

2 直線 $\sqrt{3}x - 2y + 2 = 0$, $3\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ のなす鋭角 θ を求めよ。

4

次の値を求めよ。

(1) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ のとき $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\tan 2\alpha$
(2) $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$ のとき $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\tan 2\alpha$

5

$0 \leq x < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

(1) $\sin 2x = \sqrt{2} \sin x$ (2) $\cos 2x = 3 \cos x - 2$
(3) $\cos 2x > \sin x$ (4) $\sin 2x > \cos x$

6

(1) $0 < \alpha < \pi$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ のとき, 2α , $\frac{\alpha}{2}$ の正弦, 余弦, 正接の値を求めよ。
(2) $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$ のとき, $\cos \theta$, $\tan \theta$, $\tan 2\theta$ の値を求めよ。

第3講 レベルA

1

次の等式を証明せよ。

(1) $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$

(2) $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

2

α, β, γ は鋭角, $\tan\alpha = 2, \tan\beta = 5, \tan\gamma = 8$ のとき $\alpha + \beta + \gamma$ を求めよ。

3

点 $(1, 0)$ を通り, 直線 $y = x - 1$ と $\frac{\pi}{6}$ の角をなす直線の方程式を求めよ。

4

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ とする。関数 $y = 2\sin x - \cos 2x$ の最大値, 最小値と, そのときの x の値を求めよ。

5

(1) 次の等式 (3 倍角の公式) を証明せよ。

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \quad \cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha$$

(2) $\theta = 36^\circ$ のとき, 等式 $\sin 2\theta = \sin 3\theta$ を証明せよ。

(3) (2) の等式を利用して, $\cos 36^\circ$ の値を求めよ。

6

$\triangle ABC$ において, $\tan B \tan C = 1$ であるとき, この三角形は $\angle A$ が直角である直角三角形であることを証明せよ。

第3講 レベルB

1

$0 < 2x < \frac{\pi}{4}$, $\sin 4x = \frac{24}{25}$ のとき, $\sin 2x + \cos 2x$, $\sin 2x$, $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ の値を求めよ。

2

関数 $y = 3\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ のグラフをかけ。

3 [和歌山大]

$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}$, $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{3}$ のとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $\cos(\alpha - \beta)$ の値を求めよ。
- (2) 一般に, $\cos 2x + \cos 2y = 2\cos(x + y)\cos(x - y)$ が成り立つことを示せ。
- (3) $\cos(\alpha + \beta)$ の値を求めよ。

4 [立命館大]

以下の ア $\sim$ キ は t の式で答えよ。

(1) $t = \sin \theta$ とすると $\cos 4\theta = \text{ア}$, $\sin 4\theta = \text{イ}$ $\cos \theta$, $\sin 5\theta = \text{ウ}$ である。

(2) 多項式 ウ $- 1$ を因数分解すると ウ $- 1 = (t - 1) \left(\text{エ}$ $\right)^2$ である。

$\theta = \frac{\pi}{10}$ のとき $\sin 5\theta = 1$ であるから, $\sin \frac{\pi}{10} = \text{オ}$ である。

(3) $\cos 4\theta = \sin \theta$ を満たす θ を求めよう。 $t = \sin \theta$ とおき, ア $- t = 0$ を解いて

$t = \text{カ}$ を得る。これより, $0 < \theta < \pi$ の範囲で $\cos 4\theta = \sin \theta$ を満たす θ は,

$\theta = \text{キ}$ であることがわかる。

第4講 三角関数の合成・積和と和積の公式

8 三角関数の合成

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\text{ただし } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

発展 和と積の公式

(積 → 和)

$$1 \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$2 \quad \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$3 \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$4 \quad \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

(和 → 積)

$$5 \quad \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$6 \quad \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$7 \quad \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$8 \quad \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

第4講 例題

1 ★☆☆

次の式を $r\sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ。ただし、 $r > 0$, $-\pi < \alpha \leq \pi$ とする。

(1) $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta$ (2) $\sin\theta - \cos\theta$ (3) $2\sin\theta + 3\cos\theta$

2 ★★☆☆

次の関数の最大値と最小値、およびそのときの x の値を求めよ。

$$y = -\sin x + \sqrt{3}\cos x \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

3 ★★☆☆

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

(1) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = \sqrt{3}$ (2) $\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta - 1 > 0$

4 ★★☆☆

関数 $y = 2\sin x \cos x - (\sin x + \cos x) + 3$ について

- (1) $\sin x + \cos x = t$ として、 y を t で表せ。
(2) t のとりうる値の範囲を求めよ。
(3) y の最大値と最小値を求めよ。

5 ★★★★★

次の関数の最大値、最小値と、そのときの x の値を求めよ。

$$y = \sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 3\cos^2 x \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

6 ★★☆☆

積 $\rightarrow$ 和、和 $\rightarrow$ 積の公式を用いて、次の値を求めよ。

(ア) $\sin 75^\circ \cos 15^\circ$ (イ) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$ (ウ) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

第4講 例題演習

1

次の式を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ。ただし, $r > 0$, $-\pi < \alpha < \pi$ とする。

(1) $\sqrt{2} \sin \theta - \sqrt{2} \cos \theta$

(2) $-\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$

(3) $\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta$

(4) $\sqrt{6} \sin \theta - \sqrt{2} \cos \theta$

2

次の関数の最大値と最小値を求めよ。また, そのときの x の値を求めよ。

(1) $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ ($0 \leq x < 2\pi$)

(2) $y = \sin x - \cos x$ ($\pi \leq x < 2\pi$)

3

$0 \leq x < 2\pi$ のとき, 次の方程式, 不等式を解け。

(1) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$

(2) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{2}$

(3) $\sin x \geq \sqrt{3} \cos x$

(4) $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) > 1$

4

$0 \leq \theta \leq \pi$ のとき

(1) $t = \sin \theta - \cos \theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 関数 $y = \cos \theta - \sin 2\theta - \sin \theta + 1$ の最大値と最小値を求めよ。

5

次の関数の最大値と最小値, およびそのときの x の値を求めよ。

$$y = 3\sin^2 x + 4\sin x \cos x - \cos^2 x \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

6

次の式の値を求めよ。

(1) $\cos 75^\circ \cos 45^\circ$

(2) $\sin 75^\circ \sin 45^\circ$

(3) $\sin 105^\circ + \sin 15^\circ$

(4) $\cos 105^\circ - \cos 15^\circ$

第4講 レベルA

1

次の関数の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの θ の値を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。

(1) $y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \sin \theta$

(2) $y = \sin\left(\theta + \frac{5}{6}\pi\right) - \cos \theta$

2

次の値を求めよ。

(1) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$

(2) $\cos 10^\circ + \cos 110^\circ + \cos 130^\circ$

3

$0 \leq x < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

(1) $\cos 3x + \cos x = 0$

(2) $\sin x - \sin 2x + \sin 3x = 0$

4

$0 \leq x \leq \pi$ のとき、関数 $y = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。

5

関数 $f(x) = a \cos x + b \sin x$ が $x = \frac{\pi}{3}$ のとき 1 をとり、 $x = \frac{\pi}{2}$ のとき $\sqrt{3}$ をとるよう
に、定数 a, b の値を定め、この関数の最大値を求めよ。

第4講 レベルB

1

$\triangle ABC$ において、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

2 [信州大]

関数 $f(\theta) = a \cos^2 \theta + (a-b) \sin \theta \cos \theta + b \sin^2 \theta$ の最大値が $3 + \sqrt{7}$ 、最小値が $3 - \sqrt{7}$ となるように、定数 a, b の値を定めよ。

3 [弘前大]

次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$|x| \leq \pi, |y| \leq \pi, \sin(x+y) - \sqrt{3} \cos(x+y) \geq 1$$

4 [慶応義塾大]

(1) $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ の範囲で、 $2 - |1 - \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha|$ の最大値は $\sqrt{\quad}$ 、最小値は $\sqrt{\quad}$ である。

(2) x の方程式 $\sin x + 2 \cos x = k$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ が異なる 2 個の解をもつとき、定数 k の値の範囲を求めよ。