

Check テスト 1

解答

与式を変形して, $3(1 - 2\sin^2 x) + 4\sin x = k$

$$-6\sin^2 x + 4\sin x + 3 = k$$

$\sin x = t$ とすると, $0 \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$ より $0 \leq t \leq 1$ で,

与式は,

$$-6t^2 + 4t + 3 = k \quad \cdots \textcircled{1} \quad (0 \leq t \leq 1) \text{ と表せる.}$$

ここで, 右上のグラフより,

「 $\textcircled{1}$ を満たす実数 t 」1 つに対する「与式を満たす x 」の個数は,

$$\begin{cases} 0 \leq t < \frac{1}{2}, t = 1 \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\ \frac{1}{2} \leq t < 1 \text{ のとき } 2 \text{ 個} \end{cases} \quad \cdots \textcircled{2}$$

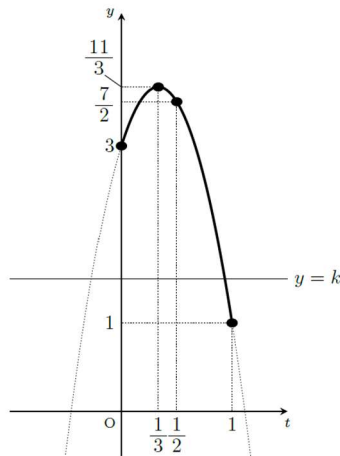
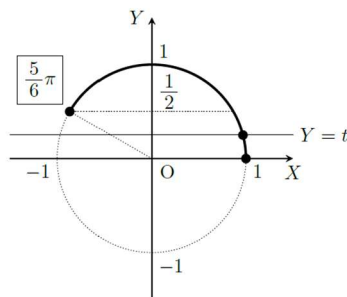
である.

$$\textcircled{1} \text{ の実数解を, } \begin{cases} y = -6t^2 + 4t + 3 \quad (0 \leq t \leq 1) \\ y = k \end{cases}$$

の異なる共有点の t 座標と考えて, $\textcircled{2}$ と併せると,

求める k の値の範囲は,

$$1 < k < 3, \frac{7}{2} < k < \frac{11}{3} \quad \blacksquare$$



Check テスト 2

解答

$\sin \theta + \cos \theta = t$ とすると, $t = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ であり,

$0 \leq \theta \leq \pi$ より $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi$ だから,

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$$

すなわち,

$$-1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

である. このもとで,

$$f(\theta) = a(\sin \theta + \cos \theta) - \sin \theta \cos \theta = at - \frac{t^2 - 1}{2} = g(t) \text{ とおく.}$$

$$g(t) = -\frac{1}{2}(t - a)^2 + \frac{a^2 + 1}{2}$$

より, $y = g(t)$ のグラフは軸の方程式が $t = a$ で上に凸の放物線である.

$$a \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \text{ のとき, } f(\theta) \text{ の最小値は, } g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}a - \frac{1}{2}$$

$$a \geq \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \text{ のとき, } f(\theta) \text{ の最小値は, } g(-1) = -a$$

$$\text{以上より, 求める最小値は } \begin{cases} a \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \text{ のとき } \sqrt{2}a - \frac{1}{2} \\ a \geq \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \text{ のとき } -a \end{cases} \quad \blacksquare$$

