

1 [2020 北海道大]

解説

n 回の目の出方は全部で 6^n 通りあり、これらは同様に確からしい。

$X_1, X_2, \dots, X_n$ の最大公約数を d_n とする。

(1) $d_n = 3$ となるのは、

$X_1, X_2, \dots, X_n$ がすべて 3, 6 のいずれかであり、かつ $X_1, X_2, \dots, X_n$ のうち少なくとも 1 つは 3

のときである。

よって、 $d_n = 3$ となるような組 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ の総数は $(2^n - 1)$ 通りであり、求

める確率は $\frac{2^n - 1}{6^n}$

(2) $X_1, X_2, \dots, X_n$ はすべて、1 以上 6 以下の整数であるから、 d_n は 1 以上 6 以下の整数である。

$d_n = 3$ となるような組 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ の総数は、(1) から $2^n - 1$ (通り)

$d_n = 5$ となるのは、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ がすべて 5 のときで、そのような組

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ の総数は 1 通り

$d_n = 2$ または $d_n = 4$ または $d_n = 6$ となるのは、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ がすべて 2 の倍数

のときで、そのような組 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ の総数は 3^n 通り

ゆえに、 $d_n = 1$ となるような組 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ の総数は

$$6^n - (2^n - 1 + 1 + 3^n) = 6^n - 3^n - 2^n \text{ (通り)}$$

よって、求める確率は $\frac{6^n - 3^n - 2^n}{6^n}$

(3) $20 = 2^2 \times 5$ から、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最小公倍数が 20 となるのは、

$X_1, X_2, \dots, X_n$ がすべて 1, 2, 4, 5 のいずれかであり、かつ $X_1, X_2, \dots,$

X_n のうち少なくとも 1 つは 4 で、かつ $X_1, X_2, \dots, X_n$ のうち少なくとも 1 つは 5

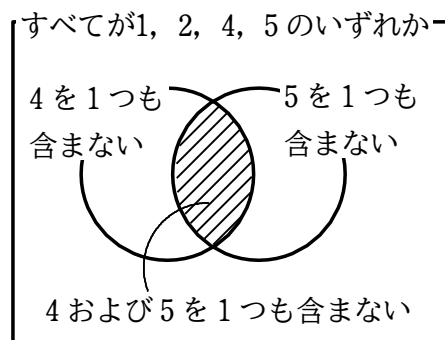
のときである。

$X_1, X_2, \dots, X_n$ がすべて 1, 2, 4, 5 のいずれかであるような組 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ の総数は 4^n 通り

これらの 4^n 通りの組のうち、4 を 1 つも含まないような組は 3^n 通り、5 を 1 つも含まないような組は 3^n 通り、4 および 5 を 1 つも含まないような組は 2^n 通りある。

ゆえに、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最小公倍数が 20 となるような組 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ の総数は $4^n - (3^n + 3^n - 2^n) = 4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n$ (通り)

よって、求める確率は $\frac{4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n}{6^n}$



2 [2020 神戸大]

解説

$$(1) \quad x_1 = a_1 x_0 (1 - x_0) = \frac{1}{4} a_1 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= a_2 x_1 (1 - x_1) \\ &= a_2 \cdot \frac{1}{4} a_1 \left(1 - \frac{1}{4} a_1 \right) \\ &= \frac{1}{16} a_1 a_2 (4 - a_1) \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$x_2 = 0 \text{ とすると } a_1 a_2 (4 - a_1) = 0 \quad \text{よって} \quad a_1 = 4$$

$$\text{ゆえに} \quad p_2 = \frac{1}{6}$$

$$x_2 > 0 \text{ とすると } a_1 a_2 (4 - a_1) > 0 \quad \text{よって} \quad a_1 < 4$$

$$\text{ゆえに, } a_1 = 1, 2, 3 \text{ であるから} \quad q_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad x_3 = a_3 x_2 (1 - x_2)$$

$$x_3 = 0 \text{ とすると } a_3 x_2 (1 - x_2) = 0 \quad \text{よって} \quad x_2 = 0, 1$$

$$x_2 = 0 \text{ である確率は } p_2 \text{ であるから} \quad \frac{1}{6}$$

$$x_2 = 1 \text{ とすると, ① から } a_1 a_2 (4 - a_1) = 16 \quad \text{ゆえに} \quad (a_1, a_2) = (2, 4)$$

$$\text{よって, } x_2 = 1 \text{ である確率は} \quad \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$

$$\text{ゆえに} \quad p_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}$$

$$x_3 > 0 \text{ とすると } a_3 x_2 (1 - x_2) > 0 \quad \text{よって} \quad 0 < x_2 < 1$$

$$\text{① から} \quad 0 < \frac{1}{16} a_1 a_2 (4 - a_1) < 1$$

$$\text{すなわち} \quad 0 < a_1 a_2 (4 - a_1) < 16 \quad \dots\dots ②$$

$$a_1 = 1 \text{ のとき, ② は } 0 < 3a_2 < 16 \quad \text{ゆえに} \quad a_2 = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$a_1 = 2 \text{ のとき, ② は } 0 < 4a_2 < 16 \quad \text{よって} \quad a_2 = 1, 2, 3$$

$$a_1 = 3 \text{ のとき, ② は } 0 < 3a_2 < 16 \quad \text{ゆえに} \quad a_2 = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\text{よって} \quad q_3 = \frac{5+3+5}{6^2} = \frac{13}{36}$$

$$(3) \quad x_4 = a_4 x_3 (1 - x_3)$$

$$x_4 = 0 \text{ とすると } a_4 x_3 (1 - x_3) = 0 \quad \text{よって} \quad x_3 = 0, 1$$

$$x_3 = 0 \text{ である確率は } p_3 \text{ であるから} \quad \frac{7}{36}$$

$x_3=1$ とすると $a_3x_2(1-x_2)=1$ ゆえに $a_3x_2^2-a_3x_2+1=0$
 これを x_2 についての 2 次方程式ととらえて解を求めると

$$x_2 = \frac{a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_3}}{2a_3}$$

① より, x_2 は有理数であるから $a_3=4$ このとき $x_2 = \frac{1}{2}$

よって, ① から $\frac{1}{16}a_1a_2(4-a_1) = \frac{1}{2}$

すなわち $a_1a_2(4-a_1)=8$ ゆえに $(a_1, a_2)=(2, 2)$

よって, $x_3=1$ となるのは, $(a_1, a_2, a_3)=(2, 2, 4)$ のときであり, その確率は

$$\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} \quad \text{したがって} \quad p_4 = \frac{7}{36} + \frac{1}{216} = \frac{43}{216}$$

3 [2020 大阪大]

解説

$t > 2$ のとき、直線 $x + y = t$ と曲線 $xy = 1$ との共有点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とおく。 $x(t - x) = 1$ から

$$x^2 - tx + 1 = 0$$

よって

$$\alpha + \beta = t, \quad \alpha\beta = 1 \quad (\alpha < \beta)$$

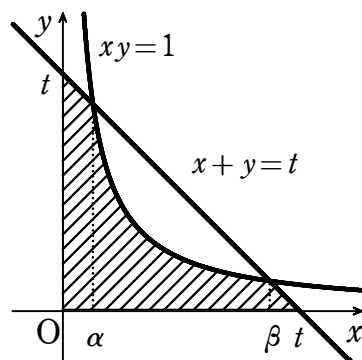
$$\alpha = \frac{t - \sqrt{t^2 - 4}}{2}, \quad \beta = \frac{t + \sqrt{t^2 - 4}}{2}$$

ゆえに $\beta - \alpha = \sqrt{t^2 - 4}$

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2}t^2 - \left\{ \frac{1}{2}(t - \alpha + t - \beta)(\beta - \alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx \right\} \\ &= \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t\sqrt{t^2 - 4} + \left[\log|x| \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{2}t(t - \sqrt{t^2 - 4}) + \log \frac{\beta}{\alpha} \\ &= \frac{1}{2}t(t - \sqrt{t^2 - 4}) + \log \frac{\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{1}{2}t(t - \sqrt{t^2 - 4}) + 2\log \beta \\ &= \frac{1}{2}t \cdot \frac{t^2 - (t^2 - 4)}{t + \sqrt{t^2 - 4}} + 2\log \frac{t + \sqrt{t^2 - 4}}{2} \\ &= \frac{2t}{t + \sqrt{t^2 - 4}} + 2\log \frac{t + \sqrt{t^2 - 4}}{2} \end{aligned}$$

したがって $\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t) - 2\log t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2t}{t + \sqrt{t^2 - 4}} + 2\log \frac{t + \sqrt{t^2 - 4}}{2t} \right)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{t^2}}} + 2\log \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{t^2}}}{2} \right) \\ &= \frac{2}{1 + 1} + 2 \cdot 0 = 1 \end{aligned}$$



4 [1999 京都大]

(解説)

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin \alpha \sin \beta \sin \{ \pi - (\alpha + \beta) \} = \sin \alpha \sin \beta \sin (\alpha + \beta)$$

これを α の関数とみなして

$$f(\alpha) = \sin \alpha \sin \beta \sin (\alpha + \beta) \text{ とおくと}$$

$$f'(\alpha) = \sin \beta \{ \cos \alpha \sin (\alpha + \beta) + \sin \alpha \cos (\alpha + \beta) \} = \sin \beta \sin (2\alpha + \beta)$$

$0 < 2\alpha + \beta < 2\alpha + (\pi - \alpha) = \pi + \alpha < 2\pi$ であるから,

$f'(\alpha) = 0$ を満たすのは $2\alpha + \beta = \pi$ のときのみ.

$$0 < \alpha < \frac{\pi - \beta}{2} \text{ のとき } f'(\alpha) > 0$$

$$\frac{\pi - \beta}{2} < \alpha < \pi \text{ のとき } f'(\alpha) < 0 \text{ から, } f(\alpha) \text{ の最大値は}$$

$$f\left(\frac{\pi - \beta}{2}\right) = \sin \frac{\pi - \beta}{2} \sin \beta \sin \left(\frac{\pi - \beta}{2} + \beta\right) = \cos^2 \frac{\beta}{2} \sin \beta = \frac{1}{2} \sin \beta (1 + \cos \beta)$$

これを β の関数とみなして

$$g(\beta) = \frac{1}{2} \sin \beta (1 + \cos \beta) \text{ とおくと}$$

$$g'(\beta) = \frac{1}{2} \cos \beta (1 + \cos \beta) - \frac{1}{2} \sin^2 \beta = \frac{1}{2} (\cos \beta + 1) (2\cos \beta - 1)$$

$0 < \beta < \pi$ から,

$$0 < \beta < \frac{\pi}{3} \text{ のとき } g'(\beta) > 0$$

$$\frac{\pi}{3} < \beta < \pi \text{ のとき } g'(\beta) < 0$$

ゆえに, $\beta = \frac{\pi}{3}$ において最大値をとる.

$$\text{このとき } \alpha = \frac{\pi - \beta}{2} = \frac{\pi}{3}, \gamma = \pi - (\alpha + \beta) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{よって } \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$