

第5講 複素数の図形への応用

5 複素数の図形への応用

異なる3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ に対して

1 $\arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ から $\angle BAC$ の大きさを求めることができる。

【注】 $\angle BAC$ は向きを考えない角を表す。 $\arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ は回転の向きと大きさをもつ一般角であり、負の角を表すこともある。

2 3点 A, B, C が一直線上にある $\iff \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が実数 (偏角が 0 または π)

3 2直線 AB, AC が垂直に交わる $\iff \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が純虚数 (偏角が $\frac{\pi}{2}$ または $-\frac{\pi}{2}$)

第5講 例題

1 ★★☆☆

$\alpha = -1$, $\beta = 2i$, $\gamma = a - i$ とし、複素数平面上で3点を $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ とする。
ただし、 a は実数の定数とする。

- (1) $a = -\frac{2}{3}$ のとき、 $\angle BAC$ の大きさを求めよ。
- (2) 3点 A , B , C が一直線上にあるように a の値を定めよ。
- (3) 2直線 AB , AC が垂直であるように a の値を定めよ。

2 ★★☆☆

異なる3つの複素数 α , β , γ の間に、次の等式が成り立つとき、3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ はどのような三角形か。

- (1) $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \sqrt{3}i$
- (2) $i\alpha + \gamma = (1 + i)\beta$

3 ★★☆☆

複素数平面上の異なる3点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$ について、次の等式が成り立つとき、三角形 OAB はどのような三角形か。

- (1) $\alpha^2 + \beta^2 = 0$
- (2) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 = 0$

4 ★★☆☆

4点 $O(0)$, $A(4i)$, $B(5-i)$, $C(1-i)$ は1つの円周上にあることを示せ。

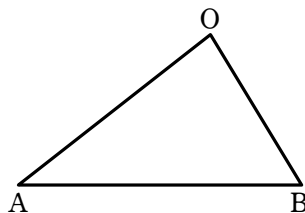
5 ★★☆☆

複素数平面上の異なる3点 α , β , γ が一直線上にあるとき、等式

$$\overline{\alpha}(\beta - \gamma) + \overline{\beta}(\gamma - \alpha) + \overline{\gamma}(\alpha - \beta) = 0 \quad \text{が成り立つことを証明せよ。}$$

6 ★★★★★

右の図のような $\triangle OAB$ の外側へ2つの正方形 $OACD$ と $OBEF$ を作るとき、線分 DF の中点 M について、
 $OM \perp AB$ であることを、複素数平面を利用して証明せよ。



7 ★★★★★

複素数平面上の単位円上の異なる3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ と、円上にない点 $H(z)$ について、等式 $z = \alpha + \beta + \gamma$ が成り立つとき、 H は $\triangle ABC$ の垂心であることを証明せよ。

第5講 例題演習

1

$\alpha = -1 - i$, $\beta = i$, $\gamma = a - 2i$ とし、複素数平面上の3点を $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ とする。
ただし、 a は実数の定数とする。

- (1) $a = 1$ のとき、 $\angle ABC$ の大きさを求めよ。
- (2) 3点 A , B , C が一直線上にあるように、 a の値を定めよ。
- (3) 2直線 AB , AC が垂直であるように、 a の値を定めよ。

2

異なる3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ が次の条件を満たすとき、 $\triangle ABC$ はどんな形の三角形か。

- (1) $2(\alpha - \beta) = (1 + \sqrt{3}i)(\gamma - \beta)$
- (2) $\beta(1 - i) = \alpha - \gamma i$

3

複素数平面上の異なる3点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$ について、次の等式が成り立つとき、 $\triangle OAB$ はどのような三角形か。

- (1) $3\alpha^2 + \beta^2 = 0$
- (2) $2\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0$

4

複素数平面上に、4点 $z_1 = -1$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 3 + i$, $z_4 = -\frac{1}{3} + 3i$ をとる。4点 z_1 , z_2 , z_3 , z_4 は同一円周上にあることを証明せよ。

5

複素数平面上の異なる4点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$, $D(\delta)$ について、次のことが成り立つことを証明せよ。

$$AB \perp CD \iff \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} \text{ が純虚数}$$

6

$\triangle ABC$ と1点 P に対し、等式 $AB^2 + PC^2 = AC^2 + PB^2$ が成り立つならば $PA \perp BC$ であることを、複素数平面を利用して証明せよ。ただし、点 P は頂点 A と異なるものとする。

7

鋭角三角形 ABC において、各頂点から対辺に下ろした3つの垂線が1点 H で交わることを、複素数平面を利用して証明せよ。ただし、 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$, $H(0)$ とする。

第5講 レベルA

1

$\triangle ABC$ の辺 BC の中点を M とするとき、 $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$ であることを、複素数平面を利用して証明せよ。

2

- (1) $\alpha = 5 - i$, $\beta = 3 + i$, $\gamma = 2 + 2i$ の3点 α , β , γ は一直線上にあることを示せ。
(2) $\alpha = 2 + i$, $\beta = 4 + 4i$, $\gamma = -1 + 3i$ を表す複素数平面上の点を、それぞれ A , B , C とする。直線 AB と直線 AC は垂直に交わることを示せ。

3

複素数平面上で、異なる4点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$, $D(\delta)$ がこの順に同一円周上にあるとき、 $\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \div \frac{\beta - \delta}{\alpha - \delta}$ は実数であることを証明せよ。

4

異なる4つの複素数 α , β , γ , δ を表す点を、それぞれ A , B , C , D とする。2つの等式 $\alpha + \gamma = \beta + \delta$, $\delta - \alpha = i(\beta - \alpha)$ が成り立つとき、四角形 $ABCD$ は正方形であることを証明せよ。

5 [東京電機大]

0でない複素数 α , β が $\alpha^2 - 2\alpha\beta + 4\beta^2 = 0$ を満たすとき、次の問いに答えよ。ただし、

$\frac{\alpha}{\beta}$ の偏角は $0 < \arg \frac{\alpha}{\beta} < \pi$ とする。

- (1) $\frac{\alpha}{\beta}$ を求めよ。
(2) 複素数平面上の原点を O , α の表す点を A , β の表す点を B とするとき、 $\triangle OAB$ はどんな三角形か。
(3) $\beta = 1 + i$ のとき、四角形 $OABC$ が OB を対角線とする平行四辺形となるように、点 C を表す複素数を定めよ。

6

異なる3つの複素数 α , β , γ の間に、次の等式が成り立つとき、3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ はどのような三角形か。

$$3\alpha^2 + 4\beta^2 + \gamma^2 - 6\alpha\beta - 2\beta\gamma = 0$$

第5講 レベルB

1 [神戸大]

互いに異なる3つの複素数 α, β, γ の間に,

等式 $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = 8(\beta^3 - 3\beta^2\gamma + 3\beta\gamma^2 - \gamma^3)$ が成り立つとする.

- (1) $\frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta}$ を求めよ.
- (2) 3点 α, β, γ が同一直線上にないとき, それらを頂点とする三角形はどのような三角形か.

2 [岡山大]

$z_0 = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), $z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{4}z_0$, $z_2 = -\frac{1}{z_0}$ を表す点を, それぞれ

P_0, P_1, P_2 とする.

- (1) z_1 を極形式で表せ.
- (2) z_2 を極形式で表せ.
- (3) 原点 O, P_0, P_1, P_2 の4点が同一円周上にあるときの z_0 の値を求めよ.

章末問題A

1

$\alpha = a + 2i$, $\beta = 2 + bi$, $\gamma = b + 8ai$ とする。4 点 0 , α , β , γ が一直線上にあるとき、実数 a , b の値を求めよ。

2 [東京電機大]

$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\overline{\alpha} + \frac{1}{\overline{\alpha}}\right) = 4$ であるとき、複素数 α の絶対値 $|\alpha|$ を求めよ。

3 [防衛医科大学校]

a , b を実数、3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ が虚数解 α をもつとする。

このとき、 α の共役複素数 $\overline{\alpha}$ もこの方程式の解になることを示せ。また、3 つ目の解 β , および係数 a , b を α , $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

4 [立命館大]

$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $\beta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とする。また、 $\gamma_n = \alpha^n + \beta^n$ ($n = 1, 2, \dots, 12$) とおく。

- (1) γ_3 の値を求めよ。 (2) $\sum_{n=1}^{12} \gamma_n$ の値を求めよ。
- (3) p , q を自然数とし、 $p + q = 12$ を満たすならば、 γ_p と γ_q は共役な複素数になることを証明せよ。

5 [龍谷大]

n を 3 以上の自然数とし、 $\theta = \frac{360^\circ}{n}$ とする。 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ を考える。

- (1) $\sum_{k=1}^n z^k$ を求めよ。 (2) $\sum_{k=1}^n \cos k\theta$ を求めよ。 (3) $\sum_{k=1}^n \cos^2 k\theta$ を n で表せ。

6 [早稲田大]

複素数 z は $z^7 = 1$ かつ $z \neq 1$ を満たす。 z の偏角を θ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ の値を求めよ。
- (2) $\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta$ の値を求めよ。

章末問題 A

7 [神戸大]

$\alpha = \cos \frac{360^\circ}{5} + i \sin \frac{360^\circ}{5}$ とする. ただし, i は虚数単位である.

100 個の複素数 $z_1, z_2, \dots, z_{100}$ を $z_1 = \alpha, z_n = z_{n-1}^3 (n=2, \dots, 100)$ で定める.

- (1) z_5 を α を用いて表せ.
- (2) $z_n = \alpha$ となるような n の個数を求めよ.
- (3) $\sum_{n=1}^{100} z_n$ の値を求めよ.

8 [神戸大]

- (1) 複素数 $1+i$ と $1+\sqrt{3}i$ を極形式で表せ. ただし, 偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする.
- (2) 正の整数 m, n が $|(1+i)^n| = |(1+\sqrt{3}i)^m|$ を満たすとき, m, n の関係式を求めよ.
- (3) 正の整数 m, n で $(1+i)^n = (1+\sqrt{3}i)^m$ かつ $m+n \leq 100$ を満たす組 (m, n) をすべて求めよ.

9 [富山県立大]

0 でない複素数 z に対し, $w = z + \frac{1}{z}$ とする. このとき, w が実数となるような z 全体が表す複素数平面上の図形を図示せよ.

10 [高知大]

2 次方程式 $x^2 + x + k = 0$ の 2 つの解を α, β とする. 複素数平面において 3 点 $1, \alpha, \beta$ が正三角形の頂点になるように, 定数 k の値を求めよ.

11 [東京大]

$2|z-3-3i|=|z|$ を満たす複素数 z のうちで, $|z|$ が最大であるものを $z_1, |z|$ が最小であるものを z_2 とする. z_1 と z_2 を求めよ.

12 [金沢大]

複素数平面上で, 複素数 α, β, γ を表す点をそれぞれ A, B, C とする.

- (1) A, B, C が正三角形の 3 頂点であるとき, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0 \dots\dots (*)$ が成立することを示せ.
- (2) 逆に, この関係式 $(*)$ が成立するとき, $A=B=C$ となるか, または A, B, C が正三角形の 3 頂点となることを示せ.

章末問題B

1

α を絶対値が1である複素数とする。このとき、 $\frac{\alpha+z}{1+\alpha z}$ が実数となるのは、 z がどんな複素数のときか。

2

絶対値が1で、 $\frac{z+1}{z^2}$ が実数であるような複素数 z を求めよ。

3 [神戸大]

複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) において、 $x \geq 0$ であるとき $|1+z| \geq \frac{1+|z|}{\sqrt{2}}$ が成り立つことを証明せよ。

4 [一橋大]

$r > 0$ とし、 $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおく。任意の角 θ に対し、複素数平面上で点 $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ と実軸との距離は2以下である。 r のとりうる値の範囲を求めよ。

5 [神戸大]

複素数 $\alpha = \cos \frac{360^\circ}{7} + i \sin \frac{360^\circ}{7}$ に対し、次の式の値を求めよ。ただし、 i は虚数単位とする。

(1) $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6$

(2) $\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha^6}$

(3) $\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\alpha^3} + \frac{1}{1-\alpha^4} + \frac{1}{1-\alpha^5} + \frac{1}{1-\alpha^6}$

(4) $\frac{\alpha^2}{1-\alpha} + \frac{\alpha^4}{1-\alpha^2} + \frac{\alpha^6}{1-\alpha^3} + \frac{\alpha^8}{1-\alpha^4} + \frac{\alpha^{10}}{1-\alpha^5} + \frac{\alpha^{12}}{1-\alpha^6}$

6 [神戸大]

$0 < \theta < \pi$ を満たす θ に対して、 $z = 1 - (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$ とおく。

(1) 複素数 z を極形式で表せ。

(2) z^{2001} が正の実数になるような θ の値は全部で何個あるか。

章末問題B

7 [千葉大]

$z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ (i は虚数単位) とおく。

- (1) $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ を求めよ。
- (2) $\alpha = z + z^2 + z^4$ とするとき, $\alpha + \overline{\alpha}$, $\alpha \overline{\alpha}$ および α を求めよ。
- (3) $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ。

8 [同志社大]

複素数 $\alpha = (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i$ について, 次の問いに答えよ。

- (1) α^2 を計算せよ。
- (2) α を極形式で表せ。ただし, α の偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。
- (3) 方程式 $z^3 = \alpha$ を解き, 解を極形式で表せ。
- (4) n を自然数とする。複素数 w_n を $w_n = (1+i)\alpha^n$ によって定めるとき, w_n が実数となる最小の自然数 n を求めよ。

9 [北海道大]

次の漸化式で定義される複素数の数列

$$z_1 = 1, z_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} z_n + 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を考える。ただし, i は虚数単位である。

- (1) z_2, z_3 を求めよ。
- (2) 上の漸化式を $z_{n+1} - \alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} (z_n - \alpha)$ と表したとき, 複素数 α を求めよ。
- (3) 一般項 z_n を求めよ。
- (4) $z_n = -\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ となるような自然数 n をすべて求めよ。

10 [京都大]

c を実数とする。 x についての 2 次方程式

$$x^2 + (3 - 2c)x + c^2 + 5 = 0$$

が 2 つの解 α, β をもつとする。複素数平面上の 3 点 α, β, c^2 が三角形の 3 頂点になり, その三角形の重心は 0 であるという。 c を求めよ。

章末問題B

11 [名古屋大]

i を虚数単位とする. $z_1=3$ および, 漸化式 $z_{n+1}=(1+i)z_n+i$ ($n \geq 1$) によって定まる複素数からなる数列 $\{z_n\}$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) z_n を求めよ.
- (2) すべての正の整数 m について, $z_{8m-7}=2^{4m-2}-1$ となることを示せ.
- (3) 複素数 z_n が表す複素数平面の点を P_n とする. P_n, P_{n+1}, P_{n+2} を 3 頂点とする三角形の面積を求めよ.

12 [北海道大]

z を複素数とし, i を虚数単位とする.

- (1) $\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}$ が実数となる点 z 全体の描く図形 P を複素数平面上に図示せよ.
- (2) z が (1) で求めた図形 P 上を動くときに $w = \frac{z+i}{z-i}$ の描く図形を複素数平面上に図示せよ.

13 [上智大]

複素数平面において, 円周 $|z|=1$ 上の異なる 3 点 z_1, z_2, z_3 を考える. このとき, 次の条件 p と q は同値であることを示せ.

$p: z_1, z_2, z_3$ を頂点とする三角形が正三角形である

$q: z_1 + z_2 + z_3 = 0$

14 [大阪大]

a を正の実数, $w = a \left(\cos \frac{\pi}{36} + i \sin \frac{\pi}{36} \right)$ とする. また, 複素数の列 $\{z_n\}$ を $z_1 = w$,

$z_{n+1} = z_n w^{2n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) で定める.

- (1) z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることを示せ.
- (2) 複素数平面で原点を O とし z_n を表す点を P_n とする. $1 \leq n \leq 17$ であるような n について, $\triangle OP_n P_{n+1}$ が直角二等辺三角形となるような n と a を求めよ.

章末問題C

1 [京都大]

x に関する方程式 $x^4 - x^3 + x^2 - (a+2)x - a - 3 = 0$ が、虚軸上の複素数を解にもつような実数 a の値をすべて求めよ。

2 [名古屋大]

実数係数の方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ は、相異なる虚数解 α, β と実数解 γ をもつとする。

- (1) $\beta = \overline{\alpha}$ が成り立つことを証明せよ。
- (2) α, β, γ が等式 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3$ を満たし、更に3点 α, β, γ が1辺の長さ $\sqrt{3}$ の正三角形をなすとき、組 (p, q, r) をすべて求めよ。

3 [北海道大]

0 でない複素数 z に対し、 $w = z^2 - \frac{1}{z^2}$ とおく。このとき、 w の実部が正になるような z の範囲を複素数平面上に図示せよ。

4 [大阪女子大]

複素数 $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$ に対して、 $\alpha = z_1 \overline{w_1} + \dots + z_n \overline{w_n}$, $b = |w_1|^2 + \dots + |w_n|^2$ とおき $b \neq 0$ とする。 $u_i = z_i - b^{-1} \alpha w_i$ ($i = 1, \dots, n$) とおくとき、次の式が成り立つことを示せ。

- (1) $|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 - \frac{|\alpha|^2}{b}$
- (2) $|z_1 \overline{w_1} + \dots + z_n \overline{w_n}| \leq \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2} \sqrt{|w_1|^2 + \dots + |w_n|^2}$

5 [同志社大]

r を正の実数、 θ を実数、 n を自然数、 i を虚数単位とする。複素数 $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に対して、 $z_n = \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}$ とする。 z_n の実部を $f_n(r) \cos n\theta$ 、虚部を $g_n(r) \sin n\theta$ とすると、 $f_1(r) = \text{ } \square \text{ }^{\text{ア}}$, $f_n(r) = \text{ } \square \text{ }^{\text{イ}}$, $g_n(r) = \text{ } \square \text{ }^{\text{ウ}}$ である。次に、 $w = z_1 + \frac{1}{2}i$ とする。実数 θ のどのような値に対しても、 w の虚部の絶対値が1以下となるような r の値の範囲は、 $\text{ } \square \text{ }^{\text{エ}} \leq r \leq \text{ } \square \text{ }^{\text{オ}}$ である。

章末問題C

6 [大阪大]

点 (a, b) は、 a と b がともに有理数のときに有理点と呼ばれる。3つの頂点がすべて有理点である正三角形は存在しないことを示せ。ただし、必要ならば $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せずに用いてもよい。

7 [九州大]

- (1) θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす実数、 i を虚数単位とし、 z を $z = \cos \theta + i \sin \theta$ で表される複素数とする。このとき、整数 n に対して次の式を証明せよ。

$$\cos n\theta = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right), \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2} \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right)$$

- (2) 次の方程式を満たす実数 x ($0 \leq x < 2\pi$) を求めよ。

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

- (3) 次の式を証明せよ。

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

8 [金沢大]

複素数 $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ と、整数 k ($1 \leq k \leq 5$) をとる。1個のさいころを投げる試行を繰り返し行う。 $n=1, 2, \dots$ に対して、

$$z_n = \begin{cases} \alpha & (n \text{ 回目の試行で } k \text{ 以下の目が出た場合}) \\ \alpha^2 & (n \text{ 回目の試行で } k \text{ より大きい目が出た場合}) \end{cases}$$

とし、 $w_n = z_1 z_2 \cdots z_n$ と定める。 w_n が実数である確率を p_n とする。

- (1) α を極形式で表せ。
- (2) p_2, p_3, p_4 を k の式で表せ。
- (3) n 回試行を繰り返したとき、 k 以下の目が出た回数を m とし、 k より大きい目が出た回数を l とする。 w_n が実数であるための m, l についての条件を求めよ。
- (4) $k=3$ のとき、 p_n を求めよ。

9 [大阪大]

n を自然数とする。

- (1) n 個の複素数 z_k ($k=1, 2, \dots, n$) が $0^\circ \leq \arg z_k \leq 90^\circ$ を満たすならば、不等式 $|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 \leq |z_1 + z_2 + \cdots + z_n|^2$ が成り立つことを示せ。
- (2) n 個の角 θ_k ($k=1, 2, \dots, n$) が

$$0^\circ \leq \theta_k \leq 90^\circ \text{ かつ } \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cdots + \cos \theta_n = 1$$

を満たすならば、不等式 $\sqrt{n-1} \leq \sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \cdots + \sin \theta_n$ が成り立つことを示せ。

章末問題C

10 [京都大]

$0 < \theta < 90$ とし、 a は正の数とする。複素数平面上の点 $z_0, z_1, z_2, \dots$ を次の条件 (a), (b) を満たすように定める。

(a) $z_0 = 0, z_1 = a$

(b) $n \geq 1$ のとき、点 $z_n - z_{n-1}$ を原点の周りに θ° だけ回転すると点 $z_{n+1} - z_n$ に一致する。

このとき、点 z_n ($n \geq 1$) が点 z_0 と一致するような n が存在するための必要十分条件は、 θ が有理数であることを示せ。

11 [東京大]

z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $A(1), B(z), C(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め、図示せよ。

12 [京都大]

複素数 α に対してその共役複素数を $\overline{\alpha}$ で表す。 α を実数ではない複素数とする。複素数平面内の円 C が $1, -1, \alpha$ を通るならば、 C は $-\frac{1}{\alpha}$ も通ることを示せ。

13 [京都大]

$\triangle ABC$ の頂点を表す複素数 α, β, γ が次の 3 条件を満たしている。

(a) $\triangle ABC$ は辺の長さ $\sqrt{3}$ の正三角形である。

(b) $\alpha + \beta + \gamma = 3$

(c) $\alpha\beta\gamma$ は絶対値 1 で、虚数部分は正である。

(1) $z = \alpha - 1$ において、 β と γ を z を用いて表せ。

(2) α, β, γ の偏角を求めよ。ただし、 $0 \leq \arg \alpha \leq \arg \beta \leq \arg \gamma < 2\pi$ とする。

14 [東京大]

複素数平面上の点 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ を

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = i, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

により定め、 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく。

(1) 3 点 b_1, b_2, b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ。

(2) すべての点 b_n ($n = 1, 2, \dots$) は円 C の周上にあることを示せ。
