

1 [2021 神戸大]

関数 $f(x) = \int_{-1}^x \frac{dt}{t^2 - t + 1} + \int_x^1 \frac{dt}{t^2 + t + 1}$ の最小値を求めよ。

2 [2021 北海道大]

正の実数 x, y が、方程式 $\frac{9^{4x} + 9^{y^2+1}}{6} = 3^{4x+y^2}$ ……(*) を満たすとする。

(1) y^2 を x を用いて表せ。

(2) 正の実数 x, y が(*) および $1 - \frac{x}{y} > 0$ を満たしながら動くとき、

$\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}} 4} + \frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}} 4}$ の最大値を求めよ。

3 [1998 京都大]

直角三角形に半径 r の円が内接していて、三角形の3辺の長さの和と円の直径との和が2となっている。

(1) この三角形の斜辺の長さを r で表せ。

(2) r の値が問題の条件を満たしながら変化するとき、この三角形の面積の最大値を求めよ。

4 [2021 大阪大]

整数 a, b, c に関する次の条件(*)を考える。

$$\int_a^c (x^2 + bx) dx = \int_b^c (x^2 + ax) dx \quad \dots\dots (*)$$

(1) 整数 a, b, c が(*) および $a \neq b$ を満たすとき、 c は3の倍数であることを示せ。

(2) $c = 3600$ のとき、(*) および $a < b$ を満たす整数の組 (a, b) の個数を求めよ。