
第 10 章

～ 複素数平面 ～

第1講 複素数平面

1 複素数平面

1 複素数平面

以下、複素数 $a + bi$ と書いた場合、文字 a, b は実数を表すものとする。

複素数 $a + bi$ に対して座標平面上の点 (a, b) を対応させ、複素数を点で表す座標平面を **複素数平面** または **複素平面** という。複素数平面を考える場合、 x 軸を **実軸**、 y 軸を **虚軸** という。

複素数 z と共役な複素数を $\bar{z}$ で表し、これを z の **共役複素数** ともいう。

点 z と点 $\bar{z}$ は 実軸に関して対称

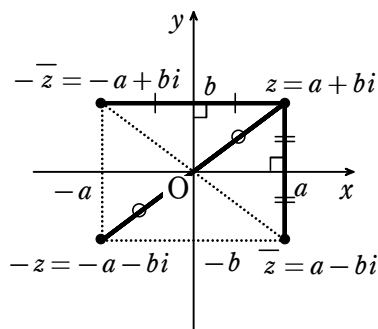
点 z と点 $-z$ は 原点に関して対称

点 z と点 $-\bar{z}$ は 虚軸に関して対称

また、複素数 z について、次のことが成り立つ。

$$1 \quad z \text{ が実数} \iff \bar{z} = z$$

$$2 \quad z \text{ が純虚数} \iff \bar{z} = -z \quad \text{ただし, } z \neq 0$$



2 複素数の絶対値

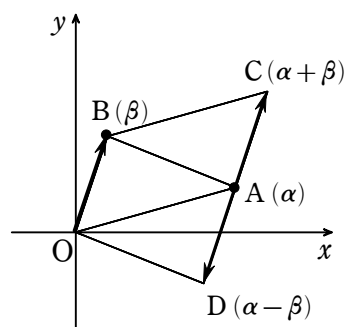
複素数 $z = a + bi$ に対して $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

3 複素数の和, 差

1 複素数の和, 差は点の平行移動や平行四辺形の頂点として表される。右の図において、四角形 OACB, ODAB は平行四辺形である。

2 2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ 間の距離 AB は

$$AB = |\beta - \alpha|$$



4 複素数の実数倍

複素数 α, β について, $\alpha \neq 0$ のとき

3 点 $0, \alpha, \beta$ が一直線上にある

$$\iff \beta = k\alpha \text{ となる実数 } k \text{ がある}$$

5 共役複素数の性質 α, β, z は複素数とする。

$$1 \quad \overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha - \beta} = \bar{\alpha} - \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}, \quad \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$$

$$2 \quad z + \bar{z} \text{ は実数である} \quad 3 \quad z\bar{z} = |z|^2$$

第1講 例題

1 ★☆☆

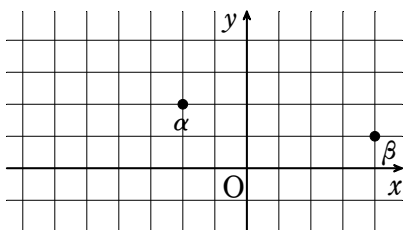
複素数平面上に、次の複素数を表す点を図示せよ。

- (1) $A(2+3i)$ (2) $B(-3-4i)$ (3) $C(5)$ (4) $D(-2i)$

2 ★☆☆

右の図の複素数平面上の点 α , β について、次の点を図示せよ。

- (1) $\alpha + \beta$ (2) $\alpha - \beta$ (3) 2α



3 ★★★

$\alpha = 3+4i$, $\beta = -1+ai$ とする。3点 0 , α , β が一直線上にあるとき、実数 a の値を求めよ。

4 ★★★

2つの複素数 α , β に対して、 $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ は実数、 $\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta$ は純虚数であることを証明せよ。ただし、 $\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta \neq 0$ とする。

5 ★☆☆

- (1) 複素数 $2+i$ の絶対値を求めよ。
 (2) $\alpha = 3+2i$, $\beta = 5+7i$ について、2点 α , β 間の距離を求めよ。

6 ★★★

$|z|=3$ かつ $|z-2|=4$ を満たす複素数 z について、次の値を求めよ。

- (1) $z\bar{z}$ (2) $z + \bar{z}$

7 ★★★

複素数 α について、 $|\alpha|=1$ のとき、 $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ は実数であることを証明せよ。

第1講 例題演習

1

次の点を複素数平面上に記せ。

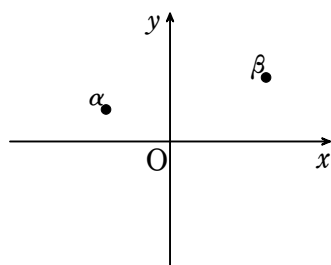
$$A(3+i), B(-2-3i), C(2-4i), D(-3), E(2i)$$

2

複素数平面上において、2点 α, β が右の図のよう
に与えられているとき、次の点を図示せよ。

(1) $\alpha + \beta$ (2) $\alpha - \beta$ (3) 2β

(4) $3\alpha + 2\beta$ (5) $-\frac{2}{3}\alpha - \beta$



3

2つの複素数 $z_1 = 3 + i(2a-1)$, $z_2 = a + 2 - i$ について、原点、 z_1 の表す点、 z_2 の表す
点をそれぞれ O, P_1, P_2 とするとき、3点 O, P_1, P_2 が同一直線上にあるような実数 a
の値を求めよ。

4

定数 α は複素数とする。

- (1) 任意の複素数 z に対して、 $z\bar{z} + \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z$ は実数であることを示せ。
(2) $\alpha\bar{z}$ が実数でない複素数 z に対して、 $\alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z$ は純虚数であることを示せ。

5

(1) 次の複素数の絶対値を求めよ。

① $5-2i$

② $1+\sqrt{3}i$

③ $-7i$

(2) 次の2点間の距離を求めよ。

① $A(2+3i), B(-4+5i)$

② $A(-2+i), B(3-4i)$

6

$|z|=5$ かつ $|z-3|=4$ を満たす複素数 z について、次の値を求めよ。

(1) $z\bar{z}$

(2) $z + \bar{z}$

7

複素数 α について、 $|\alpha|=1$, $\alpha^2 \neq -1$ のとき $\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$ は実数であることを証明せよ。

第1講 レベルA

1

複素数 z が, $2z + \overline{z} = 1 - 2i$ を満たすとき, 次の値を求めよ。

(1) $2\overline{z} + z$

(2) z

2

α, β を複素数とし, $\alpha \neq 0$ とするとき, 次のことを証明せよ。

$\overline{\alpha}\beta$ が実数 $\iff \beta = k\alpha$ となる実数 k がある。

3

z, α, β を複素数とする。

(1) $|z-3|=|z+3i|$ のとき, 等式 $z+i\overline{z}=0$ が成り立つことを示せ。

(2) 複素数 z について, $|z+1|=2|z-2|$ のとき, $|z-3|$ の値を求めよ。

(3) $|\alpha|=|\beta|=|\alpha+\beta|=2$ のとき, $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ の値を求めよ。

4

(1) $|z|=3$ かつ $|z+2|=4$ を満たす複素数 z について, $z+\overline{z}$ の値を求めよ。

(2) $|z+1|=2|z-2|$ を満たす複素数 z について, $|z-3|$ の値を求めよ。

(3) α, β は複素数とする。 $|\alpha|=1$ のとき, $|1-\overline{\alpha}\beta|^2-|\overline{\alpha}-\overline{\beta}|^2$ の値を求めよ。

5

$|z|=1$ かつ $|z+i|=\sqrt{3}$ を満たす複素数 z について, 次の値を求めよ。

(1) $z\overline{z}$

(2) $z-\overline{z}$

(3) z

第 1 講 レベル B

1

z, w を複素数とする。 $0, z, \overline{z}, w$ が、ある平行四辺形の 4 頂点であるとき、点 w は実軸上または虚軸上にあることを示せ。

2 [広島市立大]

α は複素数で $|\alpha| < 1$ とする。複素数 z が $\left| \frac{\alpha + z}{1 + \alpha z} \right| < 1$ を満たすための必要十分条件は、 $|z| < 1$ であることを証明せよ。

3

2 つの複素数 $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ について、次の問いに答えよ。ただし、 $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ とする。

- (1) $|z_1 + z_2|$ を $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$ を用いて表せ。
- (2) 不等式 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ を証明せよ。

第2講 複素数の極形式

2 複素数の極形式

1 極形式

1 0でない複素数 $z = a + bi$ について

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{ただし, } r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \theta = \frac{a}{r}, \quad \sin \theta = \frac{b}{r}$$

z の偏角の1つを θ_0 とすると $\arg z = \theta_0 + 2n\pi$ (n は整数)

【注】以降, 複素数を極形式で表すとき, その複素数は0でないとする。

2 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ (ただし, $r > 0$) のとき

$$\overline{z} = r\{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\}$$

$$-z = r\{\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)\}$$

2 極形式で表された複素数の積と商

$\alpha = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $\beta = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ (ただし, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$) とする。

1 積 $\alpha\beta = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|, \quad \arg \alpha\beta = \arg \alpha + \arg \beta$$

2 商 $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1}{r_2} \{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\}$

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \quad \arg \frac{\alpha}{\beta} = \arg \alpha - \arg \beta$$

【注】偏角についての等式 (たとえば $\arg \alpha = \arg \beta$ など) は, 両辺の角が 2π の整数倍の違いを除いて一致することを意味しているものとする。

3 原点を中心角とする回転

$\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$ と複素数 z に対して, 点 αz は, 点 z を原点を中心として θ だけ回転した点である。とくに, 点 iz は, 点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

第2講 例題

1 ★☆☆

次の複素数を極形式で表せ。ただし、偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

- (1) $3 + \sqrt{3}i$ (2) $2 - 2i$ (3) $3i$ (4) -4

2 ★☆☆

$\alpha = 2 + 2i$, $\beta = 1 - \sqrt{3}i$ のとき, $\alpha\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし、偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

3 ★★☆☆

$1 + \sqrt{3}i$, $1 + i$ を極形式で表すことにより, $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。

4 ★☆☆

(1) $z = 2 - 6i$ とする。点 z を, 原点を中心として次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(ア) $\frac{\pi}{6}$

(イ) $-\frac{\pi}{2}$

(2) 点 $(1 - i)z$ は, 点 z をどのように移動した点であるか。

5 ★★☆☆

(1) $\alpha = 1 + 2i$, $\beta = -1 + 4i$ とする。点 β を, 点 α を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

(2) 複素数平面上の2点 $A(-1 + i)$, $B(\sqrt{3} - 1 + 2i)$ について, 線分 AB を1辺とする正三角形 ABC の頂点 C を表す複素数 z を求めよ。

(3) 3点 $A(2 + 2i)$, $B(4 + i)$, $C(5 + 3i)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について, $\angle BAC$ の大きさを求めよ。

6 ★★★

(1) 点 $A(2, 1)$ を, 原点 O を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点 B の座標を求めよ。

(2) 点 $A(2, 1)$ を, 点 P を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点の座標は $(1 - \sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2})$ であった。点 P の座標を求めよ。

第2講 例題演習

1

次の複素数を極形式で表せ。ただし、偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

- (1) $-1+i$ (2) $2-2i$ (3) $-\sqrt{3}-i$
 (4) $2+2\sqrt{3}i$ (5) -3 (6) $2i$

2

次の2つの複素数 α, β について、積 $\alpha\beta$ と商 $\frac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ。ただし、偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

- (1) $\alpha = -1+i, \beta = 3+\sqrt{3}i$ (2) $\alpha = -2+2i, \beta = -1-\sqrt{3}i$

3

$1+i, \sqrt{3}+i$ を極形式で表すことにより、 $\cos \frac{5}{12}\pi, \sin \frac{5}{12}\pi$ の値をそれぞれ求めよ。

4

(1) 次の点 z を、原点を中心として次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

- ① $z = -3+i$ とする。点 z を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数 w_1
 ② $z = -3+i$ とする。点 z を $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転し、原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍に拡大した点を表す複素数 w_2
 ③ $z = 2+4i$ とする。点 z を、 $-\frac{2}{3}\pi$ だけ回転した点を表す複素数 w_3

(2) 次の複素数で表される点は、点 z をどのように移動した点であるか。

- (ア) $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}z$ (イ) $\frac{z}{1-\sqrt{3}i}$ (ウ) $-i\bar{z}$

5

(1) $\alpha = 2-\sqrt{3}i, \beta = 6+\sqrt{3}i$ について、点 β を点 α の周りに次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

- ① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{\pi}{2}$

(2) $A(2+3i)$ とする。 $\triangle OAB$ が $OA=AB$ の直角二等辺三角形となるような点 B を表す複素数 β を求めよ。

(3) 3点 $A(2-3i), B(5-i), C(-3-2i)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について、 $\angle BAC$ の大きさを求めよ。

6

(1) 点 A (2, 1) を, 原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点 B の座標を求めよ。

(2) 点 A (2, 1) を, 点 P を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点の座標は

Q $\left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であった。点 P の座標を求めよ。

第2講 レベルA

1

次の複素数を極形式で表せ。偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $\frac{3+2i}{1+5i}$ (2) $-4\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ (3) $\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}$

2

点 z を原点の周りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したのち、実軸の方向に 1、虚軸の方向に 1 だけ平行移動した点が z に一致するような複素数 z を求めよ。

3

原点を O 、 $\alpha = 2 - i$ 、 $\beta = 3 + (2a - 1)i$ を表す点をそれぞれ A 、 B とする。2 直線 OA 、 OB のなす角が $\frac{\pi}{4}$ となるように、実数 a の値を定めよ。

4

- (1) $A(2+3i)$ とする。 $\triangle OAB$ が $OA=AB$ の直角二等辺三角形となるような点 B を表す複素数 β を求めよ。
- (2) 複素数平面において、3 点 0 、 $5 - \sqrt{3}i$ 、 z が正三角形の頂点であるとき、 z を求めよ。

5

- (1) 座標平面上の点 $P(x, y)$ を、原点を中心として θ だけ回転した点を Q とするとき、 Q の座標を求めよ。
- (2) 2 点 $z = 3 + i$ 、 $w = 2 - i$ に対して、点 z を点 w の周りに $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数を求めよ。
- (3) 点 $3 - 2i$ を点 $1 + i$ の周りに θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) だけ回転した点を表す複素数が $\frac{4+3\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+2\sqrt{3}}{2}i$ であるとき、 θ の値を求めよ。

第2講 レベルB

1

$A(1+\sqrt{3}i)$ について、点 $z=4-2\sqrt{3}i$ を直線 OA に関して対称に移動した点を表す複素数を求めよ。ただし、 O は原点とする。

2

複素数平面上で、 $-1+2i$, $3+i$ を表す点をそれぞれ A , B とするとき、線分 AB を1辺とする正方形 $ABCD$ の頂点 C , D を表す複素数を求めよ。

3 [名城大]

z を虚数とするととき、次の問いに答えよ。

- (1) $z + \frac{1}{z}$ が実数となるととき、 z の絶対値 $|z|$ を求めよ。
- (2) $z + \frac{1}{z}$ が整数となる z をすべて求めよ。

4 [岐阜大]

i を虚数単位とする。複素数 z について、次の問いに答えよ。

- (1) $|z|=1$ であれば、 $z^3 + \frac{1}{z^3}$ が実数であることを示せ。
- (2) $\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}$ が実数となる点 z 全体はどのような図形か、複素数平面上に図示せよ。

第3講 ド・モアブルの定理

3 ド・モアブルの定理

1 ド・モアブルの定理

n が整数のとき $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ (ただし, $r > 0$) に対して

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

また $\frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n} \{\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)\} = \frac{1}{r^n} (\cos n\theta - i \sin n\theta)$

2 複素数の n 乗根

1 1 の n 乗根は, 次の式から得られる n 個の複素数である。

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

2 複素数平面上で, $n \geq 3$ のとき, 1 の n 乗根を表す点は, 単位円に内接する正 n 角形の各頂点である。とくに, 頂点の 1 つは点 1 である。

〔注〕 一般に, 0 でない複素数 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ (ただし, $r > 0$) の n 乗根 z_k は

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left\{ \cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right\} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

第3講 例題

1 ★☆☆

次の複素数の値を求めよ。

(1) $(1 + \sqrt{3}i)^6$ (2) $(1 - i)^{-4}$ (3) $\left(\frac{3 + \sqrt{3}i}{2}\right)^8$

2 ★★☆☆

$\alpha = \cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{19}$ (2) $\alpha \cdot \alpha^2 \cdot \cdots \cdot \alpha^{19}$

3 ★★☆☆

複素数 z が $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$ を満たすとき

(1) z を極形式で表せ。 (2) $z^{20} + \frac{1}{z^{20}}$ の値を求めよ。

4 ★★☆☆

複素数 $z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ について、 z^n が正の実数となるような最小の正の整数 n を求めよ。

5 ★★★★★

$(\sqrt{3} + i)^m = (1 + i)^n$ が成り立つ正の整数 m, n のうちで m, n がそれぞれ最小となるとき、 m と n の値を求めよ。

6 ★☆☆

次の方程式を解け。

(1) $z^3 = 1$ (2) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$

7 ★★★★★

複素数 α ($\alpha \neq 1$) を 1 の 5 乗根とする。

(1) $\alpha^2 + \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 0$ であることを示せ。
(2) (1)を利用して、 $t = \alpha + \bar{\alpha}$ は $t^2 + t - 1 = 0$ を満たすことを示せ。
(3) (2)を利用して、 $\cos 72^\circ$ の値を求めよ。

第3講 例題演習

1

次の式を計算せよ。

$$(1) (1+i)^{12} \quad (2) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-5} \quad (3) \left(\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\right)^8 \quad (4) (-\sqrt{3}+i)^{-4}$$

2

$\alpha = \cos \frac{2}{17}\pi + i \sin \frac{2}{17}\pi$ のとき、次の式の値を求めよ。

$$(1) 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{16} \quad (2) \alpha \cdot \alpha^2 \cdot \cdots \cdot \alpha^{16}$$

3

複素数 z が、 $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$ を満たすとき、 z を極形式で表せ。また、 n が自然数のとき、

$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$ を証明せよ。

4

複素数 $z = \frac{-1+i}{1+\sqrt{3}i}$ について、 z^n が実数となるような最小の正の整数 n を求めよ。

5

等式 $(i - \sqrt{3})^m = (1+i)^n$ を満たす自然数 m, n のうち、 m が最小となるときの m, n の値を求めよ。ただし、 i は虚数単位である。

6

次の方程式を解け。

$$(1) z^3 = 27 \quad (2) z^6 = -1 \quad (3) z^3 = -i \\ (4) z^2 = 1 - \sqrt{3}i \quad (5) z^4 = -32(1 + \sqrt{3}i)$$

7

$\cos 72^\circ$ を求めたい。 $z = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$ とおく。 $z^n = 1$ を満たす最小の自然数 n は

$\text{ }^{\text{ア}}$ であるから、 z は方程式 $z^4 + \text{ }^{\text{イ}}$ $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ の解となる。そこで

$w = z + \frac{1}{z}$ とおくと、 w は方程式 $w^2 + \text{ }^{\text{ウ}}$ $w + \text{ }^{\text{エ}}$ $= 0$ の解となり、

$\frac{1}{z} = \cos 72^\circ - i \sin 72^\circ$ および $\cos 72^\circ > 0$ であることから $\cos 72^\circ = \text{ }^{\text{オ}}$ を得る。

第3講 レベルA

1

ド・モアブルの定理を用いて、次の等式を証明せよ。

(1) $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$, $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

(2) $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$, $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$

2

$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$, $\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ のとき複素数 $\left(\frac{\alpha+i\beta}{\alpha-i\beta}\right)^{2004}$ の値を計算せよ。

3

n が自然数のとき、 $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n$ の値を求めよ。

4 [佐賀大]

方程式 $z^5=1$ の解 z について

(1) $z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$ を用いて $z+\frac{1}{z}$ の値を求めよ。

(2) $\cos \frac{4}{5}\pi$ の値を求めよ。

5

$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ とおくと、 $z^n=1$ の解は $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ であることを示せ。ただし、 n は自然数とする。

第3講 レベルB

1

0でない複素数 z について、次の問いに答えよ。

- (1) z の絶対値を r , 偏角を θ とするとき, $z + \frac{1}{z}$ の実部と虚部を, r と θ を用いて表せ。
- (2) n を正の整数とする。 $z + \frac{1}{z}$ が実数または純虚数ならば, $z^n + \frac{1}{z^n}$ も実数または純虚数であることを証明せよ。

2 [東北大]

z を絶対値が1の複素数, n を自然数とする。

$z^n + 1$ の絶対値が1となるような z をすべてかけ合わせて得られる複素数を求めよ。

3 [富山県立大]

$z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $z^n = 1$ となる最小の正の整数 n を求めよ。
- (2) $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ の値を求めよ。
- (3) $(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)$ の値を求めよ。
- (4) $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}$ の値を求めよ。

4 [小樽商科大]

$\theta = \frac{2\pi}{7}$, $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$, $\beta = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ のとき

- (1) $\overline{\alpha} = \alpha^6$ を示せ。
- (2) $\beta + \overline{\beta}$, $\beta \overline{\beta}$ を求めよ。
- (3) $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta$ を求めよ。

5

次の方程式の解を極形式で表せ。

- (1) $z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 8z + 16 = 0$
- (2) $z^6 + z^3 + 1 = 0$

第4講 複素数と図形

4 複素数と図形

① 線分の内分点，外分点

- 1 2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を $C(\gamma)$, $m:n$ に外分する点を $D(\delta)$ とすると

$$\text{内分点 } \gamma = \frac{n\alpha + m\beta}{m+n} \quad \text{外分点 } \delta = \frac{-n\alpha + m\beta}{m-n}$$

とくに，線分 AB の中点を表す複素数は $\frac{\alpha + \beta}{2}$

- 2 3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心を $G(\delta)$ とすると

$$\delta = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

② 方程式の表す図形

点 α を中心とする半径 r の円の方程式は $|z - \alpha| = r$

2点 α , β を結ぶ線分の垂直二等分線の方程式は $|z - \alpha| = |z - \beta|$

第4講 例題

1 ★☆☆

2点 $A(2-i)$, $B(5+5i)$ について、次の点を表す複素数を求めよ。

- (1) 線分 AB を $1:2$ に内分する点 C , 外分する点 D
- (2) 2点 A , B から等距離にある虚軸上の点 E
- (3) $\triangle CDE$ の重心 G

2 ★☆☆

次の方程式を満たす点 z 全体は、どのような図形か。

- (1) $|z-1|=|z-i|$
- (2) $|z-1+i|=2$

3 ★★☆☆

方程式 $2|z-i|=|z+2i|$ を満たす点 z の全体は、どのような図形か。

4 ★★☆☆

点 z が原点 O を中心とする半径 2 の円上を動くとき、 $w = \frac{z+2}{z-1}$ で与えられる点 w はどのような図形を描くか。

5 ★★★★★

複素数平面において、点 z が原点を中心とし、半径が 2 の円上を動くとき、点

$w = \frac{2z-i}{z+i}$ は円を描く。このとき、 w の絶対値 $|w|$ の最大値を求めよ。ただし、 i は虚数単位とする。

6 ★★☆☆

$\frac{(1-i)(z+1)}{z}$ が実数であるように複素数 z が動くとき、 z はどんな図形を描くか。

7 ★★☆☆

複素数 z に対し、 $w = \frac{z+1}{z-2}$ とおく。複素数平面上で、複素数 z を表す点が虚軸上を動くとき、複素数 w を表す点はどのような図形を描くか。

第4講 例題演習

1

3点 $A(5+4i)$, $B(3-2i)$, $C(1+2i)$ について, 次の点を表す複素数を求めよ。

- (1) 線分 AB を $2:3$ に内分する点 D , 外分する点 E
(2) $\triangle ABC$ の重心 G (3) 3点 A, B, C から等距離にある点 P

2

次の方程式を満たす点 z 全体は, どのような図形か。

- (1) $|z-3|=1$ (2) $|z+2i|=2$ (3) $(z-1)(\overline{z}-1)=4$
(4) $|z+2|=|z-i|$ (5) $|z+2+5i|=|z-1+3i|$

3

次の方程式を満たす点 z の全体は, どのような図形か。

- (1) $3|z|=|z-8|$ (2) $2|z+4i|=3|z-i|$

4

点 z が原点 O を中心とする半径 2 の円上を動くとき, 次の式で表される点 w は, どのような図形を描くか。

- (1) $w=z+2i$ (2) $w=(1-i)z-2i$ (3) $w=\frac{1}{z}$

5

複素数平面上において, z は原点 O を中心とする半径 1 の円周上を動くとする。

$w=\frac{z-i}{z-1-i}$ とおくとき, 点 w の描く曲線を求め, 絶対値 $|w|$ の最大値およびそのときの z の値を求めよ。

6

z が複素数で $\frac{(i-1)z}{i(z-2)}$ が実数となるような点 z はどのような図形を描くか。

7

-1 と異なる複素数 z に対し, 複素数 w を $w=\frac{z}{z+1}$ で定める。 z が複素数平面の虚軸上を動くとき, w が描く図形を求めよ。

第4講 レベルA

1

- (1) 点 $A(a+bi)$ に関して、点 $P(x+yi)$ と対称な点 Q を表す複素数を実数 a, b, x, y を用いて表せ。
- (2) 三角形の各辺の中点を表す複素数が $-1+i, 1+2i, 2$ であるとき、この三角形の3つの頂点を表す複素数を求めよ。

2 [芝浦工業大]

次の方程式を満たす点 z 全体は、どのような図形か。

- (1) $|2z+1|=|2z-i|$ (2) $|z+3-4i|=2$
(3) $(3z+2)(3\bar{z}+2)=9$ (4) $z-\bar{z}=4i$

3 [駒澤大]

次の方程式、不等式を満たす点 z 全体は、どのような図形か。

- (1) $2|z-1|=|z+2|$ (2) $|z-5i|=|i+2\bar{z}|$
(3) $|z-2i|<3$ (4) $|z+5-2i|\geq|z+7|$

4 [佐賀大]

複素数 z に対して $w=\frac{z-i}{z+i}$ とおくとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 z が複素数平面の原点を中心とした半径1の円周上 (ただし、 $z=-i$ を除く) を動くとき、点 w の描く図形を求めよ。
- (2) 点 z が複素数平面内の実軸上を動くとき、点 w はどのような図形を描くか。

5 [静岡大]

$z \neq 1$ である複素数 z に対して、 $w=\frac{z+1}{1-z}$ とする。点 z が複素数平面の虚軸上を動くとき、 w が描く図形を複素数平面上に図示せよ。また、 $|w+i+1|$ の最大値と最小値を求めよ。

第4講 レベルB

1

z は $|z-2| \leq 1$ を満たす複素数, a は $0 \leq a \leq 2$ を満たす実数とする. 更に $w = iaz$ とする.

- (1) 複素数平面において w の存在範囲を図示せよ.
- (2) w の偏角の範囲を求めよ.

2 [熊本大]

0 でない複素数 z に対して, $w = z + \frac{1}{z}$ とおく. w が次のようになるとき, z の満たす条件を求め, この条件を満たす z 全体の図形を図示せよ.

- (1) w が実数となる
- (2) w が実数で $1 \leq w \leq \frac{10}{3}$ を満たす

3 [北海道大]

z を複素数とする. 次のような図形を図示せよ.

- (1) $\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}$ が実数となる点 z 全体の描く図形 P
- (2) z が (1) で求めた図形 P 上を動くときに $w = \frac{z+i}{z-i}$ の描く図形

4 [東京大]

O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A, $7+7i$ を表す点を B とする. 正の実数 t に対し, $\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ を表す点 P をとる.

- (1) $\angle APB$ を求めよ.
- (2) 線分 OP の長さが最大になる t の値を求めよ.