

1 [1999 京都大]

(解説)

原点を通る直線を $y = mx$ とおく.題意により $m > 0$

$$y = x^2 + 2x \quad (x \geq -2) \quad \text{から} \quad y' = 2x + 2$$

$$x = 0 \text{ のとき } y' = 2$$

よって, $m = 2$ のとき, 相異なる 3 点で交わらないから不適.

ゆえに $m \neq 2$

$$m > 2 \text{ のとき } S_1 = \int_0^{m-2} \{ mx - (x^2 + 2x) \} dx$$

これは, 右上図から, 点 $(-1, 0)$ に関して対称移動させると

$$\int_{-m}^{-2} \{ (-x^2 - 2x) - m(x + 2) \} dx$$

となり, $S_1 < S_2$ から不適.よって $0 < m < 2$

このとき, 直線 $y = mx$ と曲線 $y = x|x + 2|$ の交点の x 座標は

$$-m-2, \quad m-2, \quad 0$$

であるから

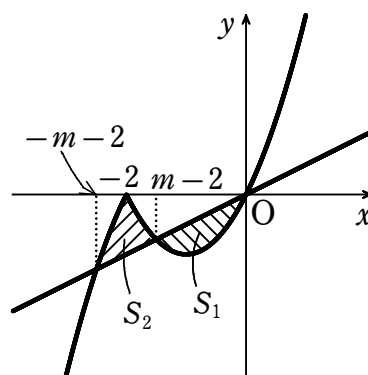
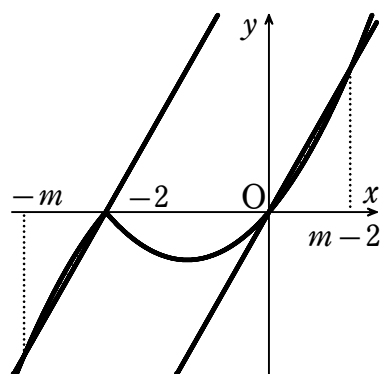
$$S_1 = \int_{m-2}^0 \{ mx - x(x+2) \} dx = \frac{1}{6}(2-m)^3$$

$$S_2 = \int_{-m-2}^{-2} \{ -x(x+2) - mx \} dx + \int_{-2}^{m-2} \{ x(x+2) - mx \} dx = 2m^2$$

$$S_1 : S_2 = 9 : 8 \quad \text{すなわち} \quad 8S_1 = 9S_2 \quad \text{から} \quad \frac{8}{6}(2-m)^3 = 18m^2$$

$$\text{よって} \quad (2m-1)(m+4)^2 = 0$$

$$0 < m < 2 \quad \text{から} \quad m = \frac{1}{2}$$



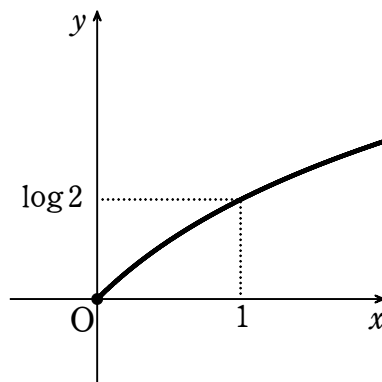
2 [2019 鹿児島大]

解説

$$(1) \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$x \geq 0$ のとき $f'(x) > 0, f''(x) < 0$

よって、 $f(x)$ は $x \geq 0$ で単調に増加し、曲線 $y = f(x)$ のグラフは上に凸であるから、グラフの概形は右のようになる。



$$(2) \quad y = \log(1+x) \text{ とする。}$$

$$\text{このとき} \quad e^y = 1+x$$

$$\text{すなわち} \quad x = e^y - 1$$

$$\text{よって} \quad V = \pi \int_0^h x^2 dy = \pi \int_0^h (e^y - 1)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^h (e^{2y} - 2e^y + 1) dy = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2y} - 2e^y + y \right]_0^h$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} e^{2h} - 2e^h + h + \frac{3}{2} \right)$$

(3) 時刻 t における水面の高さが h のとき、(2) の結果から

$$\pi \left(\frac{1}{2} e^{2h} - 2e^h + h + \frac{3}{2} \right) = vt$$

$$\text{両辺を } t \text{ で微分すると} \quad \pi(e^h - 1)^2 \frac{dh}{dt} = v$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{dh}{dt} = \frac{v}{\pi(e^h - 1)^2}$$

$$\text{ここで、} h = \log 2 \text{ のとき} \quad e^h = e^{\log 2} = 2$$

$$\text{したがって} \quad \frac{dh}{dt} = \frac{v}{\pi(2-1)^2} = \frac{v}{\pi}$$

3 [2019 大阪大]

解説

(1) 点 $(2, \sqrt{2})$ が領域 A の点であるための条件は

$$s^2 + t^2 \leq 6, s + t = 2, st = \sqrt{2} \quad \dots\dots ①$$

を満たす実数 s, t が存在することである。

$s + t = 2, st = \sqrt{2}$ から, s, t は u の 2 次方程式 $u^2 - 2u + \sqrt{2} = 0 \quad \dots\dots ②$ の 2 つの解である。

② の判別式を D とおくと
$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} < 0$$

よって, ② は実数解をもたない。

ゆえに, ① を満たす実数 s, t は存在しない。

したがって, $(2, \sqrt{2})$ は領域 A の点でない。

(2) 点 (x, y) が領域 A の点であるための条件は

$$s^2 + t^2 \leq 6, s + t = x, st = y$$

を満たす実数 s, t が存在することである。

$$s^2 + t^2 \leq 6 \quad \text{から} \quad (s + t)^2 - 2st \leq 6$$

$$s + t = x, st = y \quad \text{を代入して} \quad x^2 - 2y \leq 6$$

$$\text{すなわち} \quad y \geq \frac{1}{2}x^2 - 3 \quad \dots\dots ③$$

$s + t = x, st = y$ から, s, t は u の 2 次方程式 $u^2 - xu + y = 0$ の 2 つの解である。

$$\text{この方程式の判別式を } D \text{ とすると} \quad D = x^2 - 4y$$

$$s, t \text{ が実数であるとき, } D \geq 0 \text{ であるから} \quad x^2 - 4y \geq 0$$

$$\text{すなわち} \quad y \leq \frac{1}{4}x^2 \quad \dots\dots ④$$

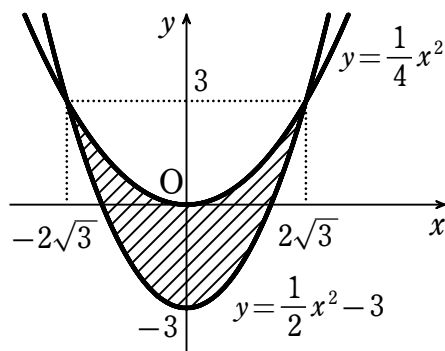
③, ④ から, 領域 A 上の点 (x, y) が満たす

$$\text{不等式は} \quad \begin{cases} y \geq \frac{1}{2}x^2 - 3 \\ y \leq \frac{1}{4}x^2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 3 = \frac{1}{4}x^2 \text{ とすると} \quad x = \pm 2\sqrt{3}$$

よって, 領域 A は右の図の斜線部分である。

ただし, 境界線を含む。



(3) 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ の x 軸より下側の部分を、
 x 軸に関して対称に折り返すと右の図のようになり、求める回転体の体積は、右の図の斜線部分を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積である。

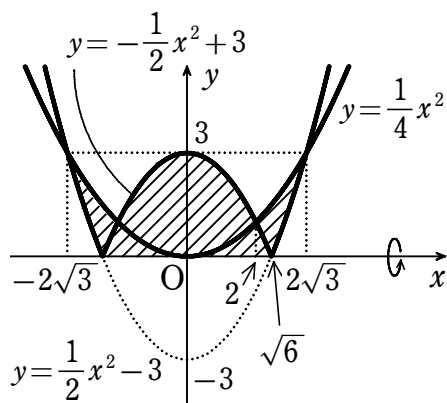
このとき、折り返してできる放物線

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ と放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ の交点の x 座

標は、 $-\frac{1}{2}x^2 + 3 = \frac{1}{4}x^2$ を解いて $x = \pm 2$

領域 A は y 軸に関して対称であるから、求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \left\{ \pi \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3 \right)^2 dx + \pi \int_2^{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4}x^2 \right)^2 dx - \pi \int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 3 \right)^2 dx \right\} \\
 &= 2\pi \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 9 \right) dx + 2\pi \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{16}x^4 dx - 2\pi \int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 9 \right) dx \\
 &= 2\pi \left[\frac{1}{20}x^5 - x^3 + 9x \right]_0^2 + 2\pi \left[\frac{1}{80}x^5 \right]_2^{2\sqrt{3}} - 2\pi \left[\frac{1}{20}x^5 - x^3 + 9x \right]_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \\
 &= \frac{112 - 48\sqrt{3} + 48\sqrt{6}}{5} \pi
 \end{aligned}$$



4 [2019 神戸大]

(解説)

条件から $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})^2}, \quad s_y = \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (y_i - \bar{y})^2}$$

また $r = \frac{\sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{3} s_x \cdot \sqrt{3} s_y} = \frac{\sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{3 s_x s_y}$

(1) $\vec{d} = (1, 1, 1)$ とすると $\vec{OP} = p\vec{d} = (p, p, p)$ (p は実数)

よって $\vec{PA} = \vec{OA} - \vec{OP} = (x_1 - p, x_2 - p, x_3 - p)$

$\vec{PA} \perp \vec{d}$ から $\vec{PA} \cdot \vec{d} = 0$

ゆえに $(x_1 - p) \cdot 1 + (x_2 - p) \cdot 1 + (x_3 - p) \cdot 1 = 0$

よって $p = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \bar{x}$

したがって、点 P の座標は $(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})$

同様にして、点 Q の座標は $(\bar{y}, \bar{y}, \bar{y})$

また $\vec{PA} = (x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, x_3 - \bar{x}), \vec{QB} = (y_1 - \bar{y}, y_2 - \bar{y}, y_3 - \bar{y})$

ゆえに $\vec{PA} \cdot \vec{QB} = \sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 3 r s_x s_y$

(2) $\vec{PA} \perp \vec{PQ}$ から

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{PA} \cdot (\vec{PQ} + \vec{QB}) = \vec{PA} \cdot \vec{PQ} + \vec{PA} \cdot \vec{QB} = 0 + 3 r s_x s_y = 3 r s_x s_y$$

また $|\vec{PA}| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{3} s_x$

$\vec{QB} \perp \vec{PQ}, |\bar{x} - \bar{y}| = a s_y$ から

$$\begin{aligned} |\vec{PB}|^2 &= |\vec{PQ} + \vec{QB}|^2 = |\vec{PQ}|^2 + 2\vec{PQ} \cdot \vec{QB} + |\vec{QB}|^2 \\ &= 3|\bar{x} - \bar{y}|^2 + 0 + \sum_{i=1}^3 (y_i - \bar{y})^2 = 3(a s_y)^2 + (\sqrt{3} s_y)^2 = 3 s_y^2 (a^2 + 1) \end{aligned}$$

よって $|\vec{PB}| = \sqrt{3} s_y \sqrt{a^2 + 1}$

ゆえに $\cos \angle BPA = \frac{\vec{PA} \cdot \vec{PB}}{|\vec{PA}| |\vec{PB}|} = \frac{3 r s_x s_y}{\sqrt{3} s_x \cdot \sqrt{3} s_y \sqrt{a^2 + 1}} = \frac{r}{\sqrt{a^2 + 1}}$

(3) $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PQ}$ から、四角形 PACQ は平面 α 上の長方形である。

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{PA}$$

$$\text{ゆえに} \quad \overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB} = 3rs_x s_y$$

$$\text{よって, } r > 0 \text{ のとき} \quad \overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QB} > 0$$

ゆえに, $\cos \angle BQC > 0$ であるから, $\angle BQC$ は鋭角である。

また, $BQ \perp PQ$ でもあるから, 点 K は線分 QC 上, または線分 QC の C を越える延長上にある。

$$\text{更に} \quad QC \cdot QK = QC \cdot QB \cos \angle BQC = \overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QB} = 3rs_x s_y$$

$$QC = PA = \sqrt{3} s_x$$

$$\text{よって} \quad \frac{QK}{QC} = \frac{QC \cdot QK}{QC^2} = \frac{3rs_x s_y}{(\sqrt{3} s_x)^2} = \frac{rs_y}{s_x}$$

$$r < \frac{s_x}{s_y} \text{ であるから} \quad \frac{rs_y}{s_x} < 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{QK}{QC} < 1$$

$$\text{よって} \quad QK < QC$$

したがって, 点 K は線分 QC 上にある。

