

1 (5点)

放物線 $y = -x^2 - 4ax - a + 1$ の頂点の座標は $\boxed{}$ である。よって、 a の値が変化するとき、頂点の軌跡の方程式は $\boxed{}$ である。

2 (5点)

円 $x^2 + 2x + y^2 - 3 = 0$ 上を動く点 P と、2 点 A (3, 1), B (1, -4) を 3 つの頂点とする三角形 ABP の重心 G の軌跡は、中心が点 (a, b) , 半径 r の円となる。このとき、 a, b, r の値を求めよ。

1 (5点)

解答 (イ) $(-2a, 4a^2 - a + 1)$ (ウ) $y = x^2 + \frac{x}{2} + 1$

2 (5点)

解答 $a = 1, b = -1, r = \frac{2}{3}$

1 (5点)

解説

$$y = -(x + 2a)^2 + 4a^2 - a + 1$$

よって、頂点は $(-2a, 4a^2 - a + 1)$ 2点

$$x = -2a, y = 4a^2 - a + 1 \text{ とおくと, } a = -\frac{x}{2} \text{ であるから } y = 4 \cdot \left(-\frac{x}{2}\right)^2 - \left(-\frac{x}{2}\right) + 1$$

$$\text{ゆえに } y = x^2 + \frac{x}{2} + 1 \text{ 3点}$$

2 (5点)

解説

$$x^2 + 2x + y^2 - 3 = 0 \text{ を変形して } (x + 1)^2 + y^2 = 4$$

$P(p, q)$ とすると、点 P は円上にあるから $(p + 1)^2 + q^2 = 4$ …… ①

$$\text{また, } G(x, y) \text{ とすると } x = \frac{p + 3 + 1}{3}, y = \frac{q + 1 - 4}{3} \text{ 2点}$$

$$\text{よって } p = 3x - 4, q = 3y + 3$$

$$\text{これを ① に代入して } (3x - 3)^2 + (3y + 3)^2 = 4$$

$$\text{ゆえに } (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\text{よって } a = 1, b = -1, r = \frac{2}{3} \text{ 3点}$$

参考 直線 AB は、円 $(x + 1)^2 + y^2 = 4$ と共有点をもたないから、 G の軌跡は、円 $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ 全体である。

