
第 2 章

～ 2 次関数 ～

第1講 2次関数とグラフ

1 関数とグラフ 研究 座標平面上の点と象限

1 関数

- 1 2つの変数 x, y について, x の値を決めるとそれに応じて y の値がただ1つ定まるとき, y は x の 関数 であるという。
- 2 1次関数, 2次関数の一般形
 1次関数は $y = ax + b$ ただし, $a \neq 0$
 2次関数は $y = ax^2 + bx + c$ ただし, $a \neq 0$
- 3 y が x の関数であるとき, y を表す x の式を $f(x), g(x)$ などと書く。
 関数 $y = f(x)$ について, x のとりうる値の範囲を関数 $f(x)$ の 定義域, 定義域の x の値に応じて y がとる値の範囲を関数 $f(x)$ の 値域 という。

2 2次関数のグラフ 研究 グラフの平行移動 研究 グラフの対称移動

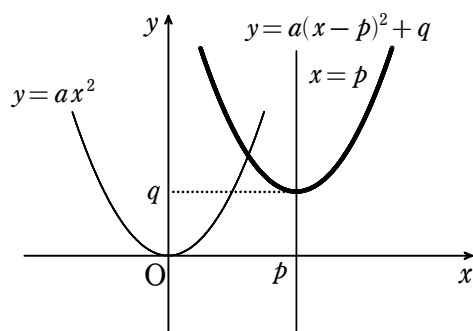
1 2次関数 $y = ax^2$ のグラフ

- 1 軸は y 軸, 頂点は原点の放物線である。
- 2 $a > 0$ のとき 下に凸,
 $a < 0$ のとき 上に凸

2 2次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフ

$y = ax^2$ のグラフを, x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動した放物線である。

その軸は直線 $x = p$, 頂点は点 (p, q) である。



3 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

$y = a(x - p)^2 + q$ の形に変形すると $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ であるから

軸は 直線 $x = -\frac{b}{2a}$, 頂点は 点 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

2次式 $ax^2 + bx + c$ を $a(x - p)^2 + q$ の形に変形することを, 平方完成 するという。

第1講 例題

1 ★☆☆

$f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ について、次の値を求めよ。

- (1) $f(0)$ (2) $f(2)$ (3) $f(-3)$ (4) $f(a+1)$

2 ★☆☆

次の2次関数のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

- (1) $y = -x^2 + 3$ (2) $y = 3(x+1)^2$ (3) $y = 2(x-1)^2 - 4$

3 ★☆☆

次の2次関数を平方完成せよ。

- (1) $y = x^2 - 8x + 12$ (2) $y = 2x^2 - 4x - 1$ (3) $y = -3x^2 + 3x + 1$

4 ★★☆☆

次の2次関数のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

- (1) $y = x^2 + 4x + 1$ (2) $y = -2x^2 + 4x + 3$
(3) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x$ (4) $y = -(x-2)(2x+1)$

5 ★★★

関数 $y = \begin{cases} x^2 & (0 \leq x \leq 1) \\ -x^2 + 4x - 2 & (1 < x \leq 3) \end{cases}$ のグラフをかけ。

6 ★★★

次の関数のグラフをかけ。

- (1) $y = x^2 - 4|x| + 2$ (2) $y = x|x-2| + 3$

第 1 講 例題演習

1

次の値を求めよ。

(1) $f(x) = 4x - 1$ のとき $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$

(2) $f(x) = -2x + \frac{1}{3}$ のとき $f(-2)$, $f\left(\frac{1}{6}\right)$, $f\left(\frac{1}{8}\right)$

(3) $g(x) = 2x^2 - 2x + 3$ のとき $g(1)$, $g(-3)$, $g(a+1)$

2

次の 2 次関数のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

(1) $y = x^2 - 2$

(2) $y = -2x^2 - 1$

(3) $y = (x+3)^2$

(4) $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2$

(5) $y = (x-2)^2 + 1$

(6) $y = -2(x+2)^2 + 5$

(7) $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$

3

次の 2 次関数を平方完成せよ。

(1) $y = x^2 + 10x$

(2) $y = x^2 - 4x + 9$

(3) $y = x^2 + 8x - 6$

(4) $y = -x^2 + 4x - 4$

(5) $y = 3x^2 - 12x + 4$

(6) $y = x^2 - x + 3$

(7) $y = -x^2 - 7x - 12$

(8) $y = 3x^2 + 9x + 18$

(9) $y = -2x^2 + 5x - 1$

4

次の 2 次関数のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

(1) $y = x^2 - 2x - 2$

(2) $y = 2x^2 + 8x - 1$

(3) $y = -x^2 - 6x - 5$

(4) $y = -3x^2 + 6x - 4$

(5) $y = x^2 - 3x + 3$

(6) $y = -2x^2 - 5x - 1$

(7) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

(8) $y = (x+2)(x-1)$

5

関数 $y = \begin{cases} x^2 + 2x & (-2 \leq x \leq 1) \\ -x^2 + 4x & (1 < x \leq 3) \end{cases}$ のグラフをかけ。

6

次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = x^2 - 3|x| + 2$

(2) $y = |x+1|(x-2)$

第1講 レベルA

1 [中部大]

放物線 $y = x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 2$ の頂点が第2象限にあるとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

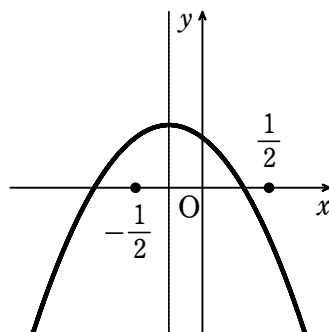
2 [慶応義塾大]

- (1) 放物線 $y = x^2 + ax - 2$ の頂点の座標を a で表せ。また、頂点が直線 $y = 2x - 1$ 上にあるとき、定数 a の値を求めよ。
- (2) 2つの放物線 $y = 2x^2 - 12x + 17$ と $y = ax^2 + 6x + b$ の頂点が一致するように定数 a , b の値を定めよ。

3

右の図は、関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフである。
次の式の符号を調べよ。

- (1) a (2) b (3) c (4) $b^2 - 4ac$
- (5) $\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c$ (6) $a - b$



4 [愛媛大]

関数 $y = x^2 - 3x + 7 - 3|x - 2|$ のグラフをかけ。

第1講 レベルB

1

関数 $f(x)$ ($0 \leq x \leq 4$) を, $f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x < 2) \\ 8-2x & (2 \leq x \leq 4) \end{cases}$ のように定義するとき, 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = f(x)$

(2) $y = f(f(x))$

2

$[a]$ は実数 a を超えない最大の整数を表すものとする。

(1) $[2.3]$, $[1]$, $[-\sqrt{3}]$ の値を求めよ。

(2) 関数 $y = 2[x]$ ($-3 \leq x \leq 2$) のグラフをかけ。

第2講 グラフの移動・2次関数の決定

4 グラフの平行移動, 対称移動

関数 $y=f(x)$ のグラフについて

- 1 x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すると, 次のようになる。

$$y=f(x) \longrightarrow y-q=f(x-p) \quad \text{すなわち} \quad y=f(x-p)+q$$

- 2 x 軸, y 軸, 原点に関して対称移動すると, 次のようになる。

	x 軸	y 軸	原点
$y=f(x)$	$-y=f(x)$	$y=f(-x)$	$-y=f(-x)$

3 2次関数の決定

- 1 与えられた条件によって, 求める2次関数を適した形において, 未定の係数を定める。

[1] $y=ax^2+bx+c$

[2] $y=a(x-p)^2+q$

- 2 $y=f(x)$ のグラフが点 (s, t) を通る。 $\Longleftrightarrow$ 等式 $t=f(s)$ が成り立つ。

第2講 例題

1 ★☆☆

放物線 $y=2x^2-8x+5$ をどのように平行移動すると、放物線 $y=2x^2+4x+7$ に重なるか。

2 ★☆☆

放物線 $y=3x^2-6x+4$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

3 ★☆☆

放物線 $y=-2x^2+3x-1$ を、次の直線または点に関して、それぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

- (1) x 軸 (2) y 軸 (3) 原点

4 ★★☆☆

ある放物線を y 軸に関して対称移動し、更に x 軸方向に 3, y 軸方向に -2 だけ平行移動すると、放物線 $y=-2x^2+16x-29$ に移った。もとの放物線の方程式を求めよ。

5 ★☆☆

次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

- (1) グラフの頂点が点 $(1, 3)$ で、点 $(0, 5)$ を通る。
(2) グラフの軸が直線 $x=-1$ で、2 点 $(-2, 9)$, $(1, 3)$ を通る。
(3) 3 点 $(-1, 9)$, $(1, -1)$, $(2, 0)$ を通る。

6 ★★☆☆

グラフが放物線 $y=2x^2+3x-5$ を平行移動したもので、2 点 $(2, -2)$, $(3, 0)$ を通るような 2 次関数を求めよ。

第 2 講 例題演習

1

放物線 $y=x^2-3x+2$ をどのように平行移動すると，放物線 $y=x^2+x+1$ に重なるか。

2

放物線 $y=2x^2-7x+3$ を，次のように平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

- (1) x 軸方向に 1 (2) y 軸方向に -3
 (3) x 軸方向に -3, y 軸方向に 1 (4) x 軸方向に 2, y 軸方向に -1

3

放物線 $y = x^2 - 5x + 2$ を、次の直線または点に関して、それぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

- (1) x 軸 (2) y 軸 (3) 原点

4

- (1) x 軸方向に -2 , y 軸方向に 5 だけ平行移動すると, 放物線 $y=3x^2+4x$ に移るような放物線の方程式を求めよ。
- (2) ある放物線を, x 軸方向に -1 , y 軸方向に -3 だけ平行移動し, 更に x 軸に関して対称移動すると, 放物線 $y=x^2-6x+7$ に移った。もとの放物線の方程式を求めよ。

5

次の条件を満たす2次関数を求めよ。

- (1) グラフの頂点が点 $(1, 3)$ で、点 $(-1, 4)$ を通る。
- (2) グラフの軸が直線 $x=4$ で、2 点 $(2, 1)$, $(5, -2)$ を通る。
- (3) 3 点 $(-2, 16)$, $(1, 1)$, $(3, 21)$ を通る。

6

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

- (1) 放物線 $y = -3x^2 + 4x + 7$ を平行移動したもので、2点 $(1, 1)$, $(2, -8)$ を通る。
 (2) x 軸方向に 1, y 軸方向に -3 だけ平行移動すると、3点 $(0, 3)$, $(1, -2)$, $(-1, 10)$ を通る。

第2講 レベルA

1

2次関数 $y = x^2 - 4x + 3$ のグラフ C と点 $A(0, -1)$ について、次の (1), (2) のグラフが表す 2次関数を求めよ。

- (1) C を x 軸方向に平行移動したもので、点 A を通るグラフ
- (2) C を y 軸方向に平行移動したもので、点 A を通るグラフ

2

放物線 $y = -x^2 + 2x - 2$ …… ① を原点に関して対称に移動し、更に x 軸に関して対称に移動して得られる放物線 ② の方程式は $y = \boxed{}$ であり、② は ① を $\boxed{}$ に関して対称に移動した放物線である。

3 [センター本試]

a を定数とし、 x の 2 次関数 $y = x^2 - 2(a+2)x + a^2 - a + 1$ のグラフを G とする。

グラフ G が y 軸に関して対称になるのは $a = \boxed{}$ のときで、このときのグラフを G_1 とする。

また、グラフ G の頂点が x 軸上にあるのは $a = \boxed{}$ のときで、このときのグラフを G_2 とする。

グラフ G_1 を x 軸方向に $\boxed{}$ 、 y 軸方向に $\boxed{}$ だけ平行移動するとグラフ G_2 に重なる。

4

放物線 $y = x^2 + 2ax + b$ が点 $(1, 1)$ を通り、頂点が直線 $y = -x - 4$ 上にあるとき、定数 a, b の値を求めよ。

第2講 レベルB

1

放物線 $y=2x^2+3x$ を平行移動した曲線で、点 $(1, 3)$ を通り、頂点が直線 $y=2x-3$ 上にある放物線の方程式を求めよ。

2 [摂南大]

直線 $x=2$ に関して放物線 $C: y=x^2-2x+3$ と対称な曲線の方程式を求めよ。また、点 $(-1, 1)$ に関して放物線 C と対称な曲線の方程式を求めよ。

第3講 2次関数の最大・最小

4 2次関数の最大・最小

① 2次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ の最大・最小

$a > 0$ のとき, $x = p$ で最小値 q をとる。最大値はない。

$a < 0$ のとき, $x = p$ で最大値 q をとる。最小値はない。

② 関数の定義域に制限のある場合の最大・最小

グラフをかいて, 頂点の位置, 定義域の両端における y の値に注目する。

③ 最大・最小の応用(文章題)

① 何を変数(x)にするかを決め, そのとりうる値の範囲(定義域)を定める。

② 最大・最小を求めようとする量(y)を, 変数(x)を用いて表す。

③ 変数(x)の定義域に注意して, ②で表した関数(x の式 y)の最大・最小を求める。

☒ $y \geq 0$ のとき, y の最大・最小を求めるのに, まず y^2 の最大・最小を求めると簡単な場合もある。このとき, 次が成り立つことを利用する。

$$A \geq 0, B \geq 0 \text{ のとき} \quad A < B \iff A^2 < B^2$$

第3講 例題

1 ★☆☆

次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y = x^2 + 4x$

(2) $y = -3x^2 - 6x + 1$

2 ★☆☆

次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y = 2x^2 - 8x + 5$ ($0 \leq x \leq 3$)

(2) $y = -x^2 + 6x - 2$ ($-1 \leq x \leq 1$)

3 ★★★

関数 $y = x^2 - 4x + a$ ($0 \leq x \leq 5$) の最大値が 11 であるように，定数 a の値を定めよ。
また，そのときの最小値を求めよ。

4 ★★★

(1) $x + 2y + 12 = 0$ のとき， xy の最大値を求めよ。

(2) $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ ， $x + y = 4$ のとき， x のとりうる値の範囲を求めよ。また， $x^2 + y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

5 ★★★

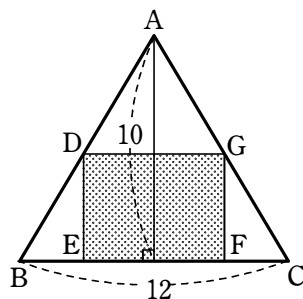
(1) x ， y の関数 $P = x^2 + 3y^2 + 4x - 6y + 2$ の最小値を求めよ。

(2) x ， y の関数 $Q = x^2 - 6xy + 10y^2 - 2x + 2y + 2$ の最小値を求めよ。

6 ★★★

底辺の長さが 12，高さが 10 の二等辺三角形 ABC に，
長方形 DEFG を右の図のように E，F が辺 BC 上に
あるように内接させる。

EF の長さを x として，長方形 DEFG の面積 S を x
で表せ。また， S の最大値と，そのときの x の値を
求めよ。



第3講 例題演習

1

次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y = x^2 - 2x - 3$

(2) $y = -2x^2 + x$

(3) $y = 3x^2 + 4x - 1$

(4) $y = -2x^2 + 3x - 5$

2

次の関数に最大値，最小値があればそれを求めよ。

(1) $y = x^2 + 4x - 5$ ($-3 \leq x \leq 1$)

(2) $y = -x^2 - 2x + 3$ ($-1 \leq x \leq 1$)

(3) $y = 4x^2 - 12x + 8$ ($0 \leq x \leq 2$)

(4) $y = x^2 + 5x + 4$ ($-2 \leq x \leq 0$)

(5) $y = -x^2 + 2x - 1$ ($-1 \leq x \leq 3$)

3

関数 $y = -x^2 + 6x + c$ ($1 \leq x \leq 4$) の最小値が -2 であるように，定数 c の値を定めよ。
また，そのときの最大値を求めよ。

4

(1) $x + 2y + 3 = 0$ のとき， xy の最大値を求めよ。

(2) $x \geq 0$ ， $y \leq 0$ ， $x - 2y = 3$ のとき， $x^2 + y^2$ の最大値，最小値を求めよ。

5

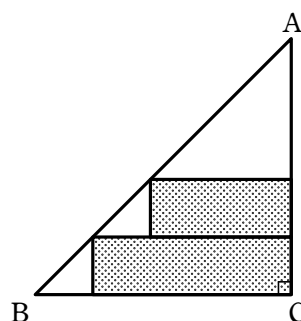
(1) x ， y の関数 $P = 2x^2 + y^2 - 4x + 10y - 2$ の最小値を求めよ。

(2) x ， y の関数 $Q = x^2 - 2xy + 5y^2 + 6x - 14y + 5$ の最小値を求めよ。

なお，(1)，(2) では，最小値をとるときの x ， y の値も示せ。

6

$AC = BC = 6$ の直角二等辺三角形 ABC の中に，縦の長さの等しい2つの長方形が右の図のように内接している。2つの長方形の面積の和の最大値と，そのときの長方形の縦の長さを求めよ。



第3講 レベルA

1

次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y = x^2 + 1 \quad (-1 \leq x \leq 3)$

(2) $y = -x^2 + 4x - 2 \quad (0 \leq x \leq 4)$

(3) $y = 2x^2 + 4x - 1 \quad (0 \leq x \leq 1)$

(4) $y = -3x^2 + 6x - 5 \quad (-1 \leq x \leq 2)$

(5) $y = x^2 - 3x + 1 \quad (1 < x \leq 3)$

(6) $y = -2x^2 + 9x \quad (0 < x < 3)$

2 [東京工芸大]

2次関数 $y = 3x^2 - (3a - 6)x + b$ が， $x = 1$ で最小値 -2 をとるとき，定数 a, b の値を求めよ。

3 [中京大]

定義域を $1 \leq x \leq 4$ とする関数 $f(x) = ax^2 - 4ax + b$ の最大値が 4 ，最小値が -10 のとき，定数 a, b の値を求めよ。

4

n が整数のとき，関数 $f(n) = -3n^2 - 14n + 6$ の最大値とそのときの n の値を求めよ。

5 [東京情報大]

k は定数とし，2次関数 $y = x^2 + 4kx + 24k$ の最小値を $m(k)$ とする。

(1) $m(k)$ を k の式で表せ。

(2) $m(k)$ を最大にする k の値と， $m(k)$ の最大値を求めよ。

6 [東京電機大]

(1) $a > 0, b > 0, a + b = 1$ のとき， $a^3 + b^3$ の最小値を求めよ。

(2) x, y, z が $x + 2y + 3z = 6$ を満たすとき， $x^2 + 4y^2 + 9z^2$ の最小値とそのときの x, y の値を求めよ。

第3講 レベルB

1 [倉敷芸術科学大]

関数 $f(x) = 2x^2 + ax + b$ は、 $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ ($a > 0$) の範囲において、最大値が 10、最小値が 1 であるとするとき、実数の係数 a , b の値を求め、 $y = f(x)$ のグラフをかけ。

2

a を負の実数とする。 $4x^2 + 12y^2 - 12xy + 4x - 18y + 7 = a$ を満たす x , y が隣り合う整数のとき、 a の最大値、およびそのときの x , y の値を求めよ。

第4講 2次関数の最大・最小（発展）例題

1 ★★☆☆

関数 $y=2x^2-4ax$ ($0 \leq x \leq 2$) について、次の問いに答えよ。

- (1) 最小値を求めよ。 (2) 最大値を求めよ。

2 ★★☆☆

a は定数とする。関数 $y=x^2-2x+1$ ($a \leq x \leq a+1$) について、次の問いに答えよ。

- (1) 最小値を求めよ。 (2) 最大値を求めよ。

3 ★★★

a は実数の定数とする。2次関数 $f(x)=x^2-4x+a$ の $a \leq x \leq a+1$ における最小値を $g(a)$ とする。

- (1) $g(a)$ を求めよ。
(2) $g(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

4 ★★★

関数 $y=-2x^4-8x^2$ の最大値，最小値があれば，それを求めよ。

5 ★★★

次の関数の最大値，最小値があれば，それを求めよ。

- (1) $y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)-1$ (2) $y=(x^2+2x)^2-4(x^2+2x)-4$ ($-2 \leq x \leq 1$)

第4講 2次関数の最大・最小（発展）例題演習

1

関数 $y = -x^2 + 4ax - a$ ($0 \leq x \leq 2$) について、次の問いに答えよ。

- (1) 最大値を求めよ。 (2) 最小値を求めよ。

2

a は定数とする。関数 $y = x^2 - 4x + 1$ ($a \leq x \leq a + 1$) について

- (1) 最小値を求めよ。 (2) 最大値を求めよ。

3

関数 $f(x) = x^2 - 6x + a$ ($a \leq x \leq a + 4$) の最小値、最大値をそれぞれ $g(a)$, $G(a)$ とする。

- (1) $g(a)$, $G(a)$ をそれぞれ求めよ。
(2) $g(a)$, $G(a)$ の最小値をそれぞれ求めよ。

4

次の関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。

- (1) $y = -2x^4 - 4x^2 + 3$ (2) $y = -2x^4 + 4x^2 + 3$

5

次の関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。

- (1) $y = -(2x^2 - 3x)^2 - 3(2x^2 - 3x) - 1$
(2) $y = (x^2 - 6x)^2 + 12(x^2 - 6x) + 30$ ($1 \leq x \leq 5$)

第4講 レベルA

1

a は $a > 1$ を満たす定数とする。関数 $y = -2x^2 + 8x + 1$ ($1 \leq x \leq a$) について

- (1) 最大値を求めよ。 (2) 最小値を求めよ。

2

a は定数とする。関数 $y = -x^2 - ax + a^2$ ($0 \leq x \leq 1$) の最大値を M とする。

- (1) M を a で表せ。 (2) $M = 5$ のとき、 a の値を求めよ。

3 [松山大]

2 次関数 $f(x) = -x^2 + 2x$ の $a \leq x \leq a + 2$ における最大値、最小値は a の関数であり、これをそれぞれ $F(a)$ 、 $G(a)$ と表す。この関数 $F(a)$ 、 $G(a)$ のグラフをかけ。

4

2 次関数 $y = -x^2 + 4ax + 4a$ の最大値 m を a で表せ。また、 a の関数 m の最小値と、そのときの a の値を求めよ。

5 [法政大]

2 次関数 $y = x^2 - ax$ の $2 \leq x \leq 5$ における最大値と最小値の差を d とおく。ただし、 a は実数の定数とする。このとき、 $d = 5$ となるような a の値を求めよ。

第4講 レベルB

1 [千葉大]

a を実数とする。関数 $f(x) = x^2 - a|x - 2| + \frac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ。

2 [福岡大]

2次関数 $y = x^2 + ax + b$ が、 $0 \leq x \leq 3$ の範囲で最大値 1 をとり、 $0 \leq x \leq 6$ の範囲で最大値 9 をとるとき、定数 a, b の値を求めよ。

3

- (1) $0 \leq x \leq 4$ のとき、関数 $y = (x^2 - 4x + 3)(-x^2 + 4x + 2) - 2x^2 + 8x - 1$ の最大値、最小値とそのときの x の値を求めよ。
- (2) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ とする。関数 $f(f(x))$ の区間 $0 \leq x \leq 3$ における最大値と最小値を求めよ。

4

p を定数とする。関数 $y = (x^2 - 2x)^2 + 6p(x^2 - 2x) + 3p + 1$ の最小値を m とする。

- (1) 最小値 m を p の式で表せ。 (2) m の最大値を求めよ。

第5講 2次方程式とグラフ

5 2次方程式

1 2次方程式の解き方

1 因数分解 数の積の性質「 $AB=0$ ならば $A=0$ または $B=0$ 」を用いる。

2 $a>0$ のとき, $x^2=a$ の解は $x=\pm\sqrt{a}$

3 解の公式 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は

$$b^2-4ac\geq 0 \text{ のとき実数解をもち } x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$b=2b' \text{ ならば } b'^2-ac\geq 0 \text{ のとき実数解をもち } x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

2 2次方程式の係数と実数解

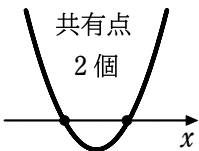
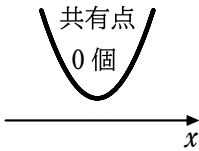
2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について, 判別式 を $D=b^2-4ac$ とすると, 次のことが成り立つ。

$$\left. \begin{array}{l} D>0 \iff \text{異なる2つの実数解をもつ} \\ D=0 \iff \text{ただ1つの実数解(重解)をもつ} \\ D<0 \iff \text{実数解をもたない} \end{array} \right\} D\geq 0 \iff \text{実数解をもつ}$$

第5講 2次方程式とグラフ

6 2次関数のグラフと x 軸の位置関係

1 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の位置関係

$D = b^2 - 4ac$ の符号	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
x 軸との位置関係	異なる2点で交わる	接する	共有点をもたない
$a > 0$ のとき グラフと x 軸との共有点の個数	共有点 2個 	共有点 1個 	共有点 0個 
$ax^2 + bx + c = 0$ の実数解	$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	ない

・2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について

グラフと x 軸の共有点の x 座標 = 方程式の実数解

グラフと x 軸の共有点の個数 = 方程式の実数解の個数

・2次関数 $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ のグラフは、 x 軸と2点 $(\alpha, 0)$ 、 $(\beta, 0)$ で交わる。

発展 放物線と直線の共有点の座標

1 放物線と直線の共有点

1 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と直線 $y = mx + n$ の共有点の x 座標

$\iff$ 2次方程式 $ax^2 + bx + c = mx + n$ の実数解

2 1において、共有点の個数と2次方程式の実数解の個数は一致する。

放物線と直線は異なる2点で交わる $\iff$ 異なる2つの実数解をもつ ($D > 0$)

放物線と直線は接する $\iff$ 重解をもつ ($D = 0$)

放物線と直線は共有点をもたない $\iff$ 実数解をもたない ($D < 0$)

第5講 例題

1 ★☆☆

- (1) 2次方程式 $x^2 + (2k-1)x + k^2 - 3k - 1 = 0$ が実数解をもつように、定数 k の値の範囲を定めよ。
- (2) 2次方程式 $3x^2 + 8x + k = 0$ が重解をもつように、定数 k の値を定め、そのときの重解を求めよ。

2 ★☆☆

次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

- (1) $y = x^2 - 6x - 4$ (2) $y = -4x^2 + 4x - 1$

3 ★☆☆

2次関数 $y = x^2 - 2kx + k^2 - k + 3$ のグラフについて、次の問いに答えよ。

- (1) x 軸と異なる2点で交わるとき、定数 k の値の範囲を求めよ。
- (2) x 軸と接するとき、定数 k の値とそのときの接点の座標を求めよ。

4 ★★☆☆

k は定数とする。放物線 $y = x^2 - 2x + 2k - 4$ と x 軸の共有点の個数を求めよ。

5 ★☆☆

次の放物線と直線に共有点があれば、その座標を求めよ。

- (1) $y = x^2$, $y = x + 2$ (2) $y = x^2 - 2x$, $y = 2x - 4$
- (3) $y = x^2 + 2x - 1$, $y = x - 2$

6 ★★☆☆

a は定数とする。放物線 $y = x^2 - 2x + a$ について

- (1) 直線 $y = 2x$ と接するように a の値を定めよ。
- (2) 直線 $y = 2x + 3$ と共有点をもたないように a の値の範囲を定めよ。

第5講 例題演習

1

次の条件を満たすように、定数 m の値の範囲を定めよ。

- (1) 2次方程式 $x^2 + 5x + m = 0$ が異なる2つの実数解をもつ。
- (2) 2次方程式 $2x^2 - 3x + m - 1 = 0$ が実数解をもたない。
- (3) 2次方程式 $3x^2 + 6x + 2m - 1 = 0$ が実数解をもつ。

2

次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

- (1) $y = x^2 + 3x - 2$
- (2) $y = -x^2 + 2x - 1$

3

2次関数 $y = x^2 + 2(k-1)x + k^2 - 3$ のグラフについて、次の問いに答えよ。

- (1) x 軸と共有点をもたないとき、定数 k の値の範囲を求めよ。
- (2) x 軸に接するとき、定数 k の値とそのときの接点の座標を求めよ。

4

k は定数とする。放物線 $y = 2x^2 - 4x + 2k - 2$ と x 軸の共有点の個数を求めよ。

5

次の放物線と直線に共有点があれば、その座標を求めよ。

- (1) $y = x^2$, $y = -x + 6$
- (2) $y = x^2 + 6x + 9$, $y = -2x - 7$
- (3) $y = x^2 + 2$, $y = 2x - 6$

6

放物線 $y = x^2 - 3x + m$ が次の条件を満たすとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

- (1) 直線 $y = x$ と接する。
- (2) 直線 $y = 4x + 3$ と異なる2点で交わる。

第5講 レベルA

1

- (1) x の2次方程式 $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m+3 = 0$ が実数解をもつように、定数 m の値の範囲を定めよ。
- (2) x の方程式 $(m+1)x^2 + 2(m-1)x + 2m-5 = 0$ がただ1つの実数解をもつとき、定数 m の値を求めよ。

2 [慶応義塾大]

2次方程式 $x^2 + (2-4k)x + k+1 = 0$ が正の重解をもつとする。このとき、定数 k の値は $k = \sqrt{\quad}$ であり、2次方程式の重解は $x = \sqrt[4]{\quad}$ である。

3

- (1) 2次関数 $y = -2x^2 - 3x + 3$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めよ。
- (2) 放物線 $y = x^2 - (k+2)x + 2k$ が x 軸から切り取る線分の長さが4であるとき、定数 k の値を求めよ。

4

放物線 $y = x^2 + ax + b$ が2直線 $y = 2x$, $y = -4x + 3$ の両方に接するとき、定数 a , b の値を求めよ。

5 [東京学芸大]

a は定数とする。2つの関数 $y = x^2 - 4$ と $y = a(x+1)^2$ のグラフの共有点の個数を調べよ。

第5講 レベルB

1

2つの2次方程式 $2x^2 + kx + 4 = 0$, $x^2 + x + k = 0$ が共通の実数解をもつように定数 k の値を定め、その共通解を求めよ。

2 [名城大]

放物線 $y = x^2 + px + q$ の頂点が直線 $y = -\frac{1}{2}x - 3$ 上にあるとき

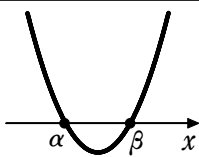
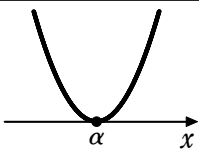
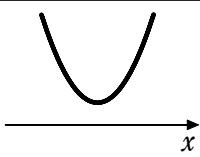
- (1) q のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) 放物線 $y = x^2 + px + q$ が原点を通過するとき、頂点の座標を求めよ。
- (3) 放物線 $y = x^2 + px + q$ が x 軸と異なる2点で交わり、かつその2点間の距離が2であるとき、頂点の座標を求めよ。

第6講 2次不等式

7 2次不等式

1 2次不等式の解

1 $a > 0$ とする。

$D = b^2 - 4ac$ の符号	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸 の位置関係			
$ax^2 + bx + c = 0$ の実数解	$x = \alpha, \beta$	$x = \alpha$	ない
$ax^2 + bx + c > 0$ の解	$x < \alpha, \beta < x$	α 以外のすべての実数	すべての実数
$ax^2 + bx + c \geq 0$ の解	$x \leq \alpha, \beta \leq x$	すべての実数	すべての実数
$ax^2 + bx + c < 0$ の解	$\alpha < x < \beta$	ない	ない
$ax^2 + bx + c \leq 0$ の解	$\alpha \leq x \leq \beta$	$x = \alpha$	ない

$a < 0$ のときは、不等式の両辺に -1 を掛けて、 x^2 の係数を正にして考える。

2 $\alpha < \beta$ のとき $(x - \alpha)(x - \beta) > 0$ の解は $x < \alpha, \beta < x$

$(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ の解は $\alpha < x < \beta$

$(x - \alpha)^2 > 0$ の解は α 以外のすべての実数

$(x - \alpha)^2 < 0$ の解は ない

3 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ に対して

常に $ax^2 + bx + c > 0 \iff a > 0$ かつ $D = b^2 - 4ac < 0$

常に $ax^2 + bx + c < 0 \iff a < 0$ かつ $D = b^2 - 4ac < 0$

第6講 例題

1 ★☆☆

次の2次不等式を解け。

(1) $x^2 - 8x + 12 \leq 0$

(2) $x^2 - 3x - 18 > 0$

(3) $-x^2 + 7x + 8 > 0$

(4) $x^2 - 4x - 3 \geq 0$

(5) $-x^2 + 3x + 2 > 0$

(6) $x^2 - 1 > 2x$

(7) $x(x-4) \leq 2(x^2-3)$

2 ★☆☆

次の2次不等式を解け。

(1) $x^2 + 10x + 25 > 0$

(2) $x^2 - 12x + 36 \geq 0$

(3) $4x^2 - 4x + 1 < 0$

(4) $9x^2 \leq 6x - 1$

(5) $2x^2 - 8x + 13 > 0$

(6) $3x^2 - 6x + 6 \leq 0$

3 ★★☆☆

次の不等式を解け。

(1)
$$\begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 < 0 \\ 3x^2 - 4x - 4 \leq 0 \end{cases}$$

(2) $2 - 3x - 2x^2 \leq 4x - 2 < x^2$

4 ★★☆☆

2次不等式 $ax^2 + 5x + b > 0$ の解が $2 < x < 3$ となるように、定数 a, b の値を定めよ。

5 ★★☆☆

次の2次不等式の解がすべての実数であるとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

(1) $x^2 - mx + 1 > 0$

(2) $-x^2 + mx + 2m < 0$

6 ★★★

次の2次不等式を解け。ただし、 a は定数とする。

(1) $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a < 0$

(2) $x^2 - (a+2)x + 2a > 0$

第6講 例題演習

1

次の2次不等式を解け。

(1) $x^2 + 5x - 6 > 0$

(2) $x^2 + 8x + 15 \leq 0$

(3) $2x^2 - 5x + 3 > 0$

(4) $2(x^2 - 1) < 3x$

(5) $-x^2 + 5x - 5 < 0$

(6) $x^2 + 4x + 2 \leq 0$

(7) $4x - x^2 \geq -7$

(8) $2x^2 \leq x^2 + 4x - 1$

(9) $3x^2 < x(x - 3) + 5$

(10) $(2x + 1)^2 + 24 > (x + 5)^2$

2

次の2次不等式を解け。

(1) $x^2 - 8x + 16 > 0$

(2) $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$

(3) $x^2 - 4x + 8 \geq 0$

(4) $-3x^2 + 12x - 13 \geq 0$

3

次の不等式を解け。

(1)
$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 < 0 \\ x^2 - 7x + 12 > 0 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} x^2 + 4x \geq 0 \\ x^2 - 9 > 0 \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} 1 - 4x + x^2 \leq 0 \\ -3x^2 + 11x + 4 > 0 \end{cases}$$

(4) $-8 \leq x^2 - 6x < 16$

4

(1) x についての2次不等式 $x^2 + ax + b \geq 0$ の解が $x \leq -1$, $3 \leq x$ となるように、定数 a , b の値を定めよ。

(2) x についての2次不等式 $ax^2 - 2x + b > 0$ の解が $-2 < x < 1$ となるように、定数 a , b の値を定めよ。

5

次の条件を満たすとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

(1) 2次不等式 $x^2 - (m - 1)x + 3 > 0$ の解がすべての実数となる。

(2) 2次不等式 $-x^2 + 2mx + m \geq 0$ が解をもつ。

6

次の2次不等式を解け。ただし、 a は定数とする。

(1) $x^2 + (a - 1)x - a > 0$

(2) $x^2 - ax - 2a^2 \leq 0$

第6講 レベルA

1

次の不等式を解け。

(1) $x^2 - 3|x - 1| > 7$

(2) $|x^2 - 2x - 3| \geq 3 - x$

2

m は定数とする。放物線 $y = x^2 + (m - 4)x + m - 1$ と x 軸の共有点の個数を調べよ。

3

2つの2次方程式

$$x^2 + px + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad x^2 + px + p = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が次の条件を満たすとき、定数 p の値の範囲を求めよ。

(1) ① が実数解をもつ。

(2) ② が実数解をもつ。

(3) ①, ② がともに実数解をもつ。

(4) ①, ② のうち、少なくとも一方が実数解をもつ。

4

2次不等式 $ax^2 + (a - 1)x + a - 1 > 0$ の解がすべての実数であるとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

5 [福岡大]

a, b を定数とし、 $x^2 - 5x + 6 \leq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$, $x^2 + ax + b < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$ とする。①, ② を同時に満たす x の値はなく、① または ② を満たす x の値の範囲が $2 \leq x < 5$ であるとき、

$a = \boxed{}, b = \boxed{}$ である。

6

次の x についての不等式を解け。ただし、 a は定数とする。

$$x^2 - (a^2 - a + 2)x - a^3 + 2a^2 \leq 0$$

第6講 レベルB

1

4次不等式 $2x^4 - 11x^2 + 5 > 0$ を解け。

2

$x^2 + y^2 = 4$ のとき、 $x^2 - y^2 + 4x$ の最大値と最小値を求めよ。

3

- (1) 関数 $y = |x^2 - x - 2| - 2x$ のグラフをかけ。
- (2) 方程式 $|x^2 - x - 2| = 2x + k$ の異なる実数解の個数を調べよ。

4

2次不等式 $x^2 - (2a + 3)x + a^2 + 3a < 0$ ……①, $x^2 + 3x - 4a^2 + 6a < 0$ ……② について、次の各問いに答えよ。ただし、 a は定数で $0 < a < 4$ とする。

- (1) ①, ② を解け。
- (2) ①, ② を同時に満たす x が存在するのは、 a がどんな範囲にあるときか。
- (3) ①, ② を同時に満たす整数 x が存在しないのは、 a がどんな範囲にあるときか。

5 [東京慈恵会医科大]

x の2次不等式 $6x^2 - (16a + 7)x + (2a + 1)(5a + 2) < 0$ を満たす整数 x が10個となるように、正の整数 a の値を定めよ。

第7講 2次不等式の応用

8 2次不等式の応用

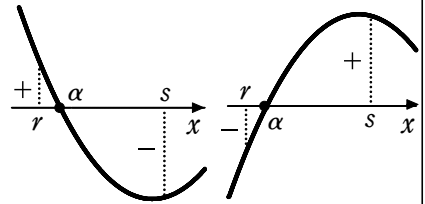
補 2次関数のグラフと2次方程式の解の範囲

1 2次方程式の解の存在範囲

2次関数 $y=f(x)$ について、 $f(r)$ 、 $f(s)$ の符号が異なると、 r と s の間に $f(x)=0$ となる x の値 α が存在する。

すなわち、 $r < s$ とすると

$f(r)f(s) < 0 \implies$ 解 $x=\alpha$ ($r < \alpha < s$) が存在



第7講 例題

1 ★★☆☆

- (1) 2次関数 $y = x^2 - 2ax + 2a^2 - 5$ のグラフが、 x 軸の $x > 1$ の部分と異なる2点で交わるように、定数 a の値の範囲を定めよ。
- (2) 2次方程式 $x^2 - (m-4)x + m - 1 = 0$ が、異なる2つの正の解をもつように、定数 m の値の範囲を定めよ。

2 ★★☆☆

2次方程式 $2x^2 - ax + a - 1 = 0$ が、 $-1 < x < 1$ の範囲に異なる2つの実数解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

3 ★★☆☆

- (1) 放物線 $y = x^2 - 2ax + a + 2$ と x 軸が、1点は $x < 1$ 、他の1点は $x > 1$ で異なる2点で交わる時、定数 a の値の範囲を求めよ。
- (2) 2次方程式 $2x^2 + ax + a = 0$ が、3より大きい解と3より小さい解をもつように、定数 a の値の範囲を定めよ。

4 ★★☆☆

2次方程式 $x^2 - ax + 1 = 0$ の1つの解が0と1の間であり、他の解が2と3の間にあるように、定数 a の値の範囲を定めよ。

5 ★★★★★

$0 \leq x \leq 2$ において、常に $x^2 - 2ax + 3a > 0$ が成り立つように定数 a の値の範囲を定めよ。

第7講 例題演習

1

- (1) 2次関数 $y = x^2 + mx + 2$ が次の条件を満たすように、定数 m の値の範囲を定めよ。
(ア) この2次関数のグラフと x 軸の正の部分が異なる2点で交わる。
(イ) この2次関数のグラフと x 軸の $x < -1$ の部分が異なる2点で交わる。
- (2) 2次関数 $y = x^2 + 2(m-1)x + 3 - m$ のグラフが x 軸の $x < 1$ の部分と、異なる2点で交わる時、定数 m の値の範囲を求めよ。
- (3) 2次方程式 $x^2 + 2mx + 2m + 3 = 0$ が次のような実数解をもつように、定数 m の値の範囲を定めよ。
(ア) 異なる2つの負の解 (イ) -4 より大きい異なる2つの解

2

- (1) x についての2次方程式 $3x^2 + 4ax + a^2 + a = 0$ が、 $-2 < x < 1$ の範囲に異なる2つの実数解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。
- (2) 2次方程式 $x^2 - 2ax + 2a + 3 = 0$ が異なる2つの実数解をもち、その2つの実数解がともに1以上5以下であるように、定数 a の値の範囲を定めよ。

3

- (1) 放物線 $y = x^2 + 2(m-1)x + 3 - m^2$ が x 軸の正の部分と負の部分のそれぞれと交わるように、定数 m の値の範囲を定めよ。
- (2) 2次方程式 $x^2 - 4ax + 3a = 0$ が、1より大きい解と1より小さい解をもつように、定数 a の値の範囲を定めよ。

4

次の条件を満たすような定数 a の値の範囲を求めよ。

- (1) 2次方程式 $2x^2 - 3x + a = 0$ の1つの解が0と1の間にあり、他の解が1と2の間にある。
- (2) 2次方程式 $2ax^2 - (a+2)x - 5 = 0$ の1つの解が -1 と0の間にあり、他の解が2と3の間にある。ただし、 $a > 0$ とする。

5

$0 \leq x \leq 8$ のすべての x の値に対して、不等式 $x^2 - 2mx + m + 6 > 0$ が成り立つような定数 m の値の範囲を求めよ。

第7講 レベルA

1

a を 0 でない実数の定数とする。 x の方程式 $ax^2 + 2(a-2)x + 2a-7=0$ が異なる 2 つの負の実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

2

不等式 $x^2 - 6x + 8 \leq 0$ を満たすすべての x に対して、次の不等式を満たすように定数 a の値の範囲を定めよ。

(1) $x^2 + 4ax + 5 \leq 0$

(2) $x^2 + 4ax + 5 \geq 0$

第7講 レベルB

1

方程式 $x^2 + (2-a)x + 4-2a=0$ が $-1 < x < 1$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

2

$a < b < c$ のとき、次の方程式は異なる2つの解をもち、2つの解のうち、1つは a と b の間にあり、他の1つは b と c の間にあることを示せ。

$$(x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + (x-a)(x-b) = 0$$

第8講 総復習問題

1

$f(x) = -2x^2 - 10x - 3$ とおく。

(1) 2次関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

(2) $f\left(a - \frac{5}{2}\right) = 5$ となる定数 a の値を求めよ。

2 [北海学園大]

放物線 $y = x^2 + ax + b$ を原点に関して対称移動し、さらに y 軸方向に 8 だけ平行移動すると、放物線 $y = -x^2 + 7x + 5$ が得られるという。定数 a, b の値を求めよ。

3

最大値が 5 で、そのグラフが 2 点 $(-3, 2), (1, 2)$ を通るような 2 次関数を求めよ。

4

(1) 関数 $y = x^2 - 4x$ ($0 < x \leq 5$) に最大値、最小値があれば、それを求めよ。

(2) 関数 $y = -3x^2 - 4x + 2$ ($-1 \leq x < 0$) の値域を求めよ。

5

周の長さが 80 である長方形の対角線の長さ l の最小値を求めよ。

6

a を正の定数とすると、 $0 \leq x \leq a$ における関数 $y = -x^2 + 6x$ について

(1) 最大値を求めよ。

(2) 最小値を求めよ。

7

(1) 関数 $y = x^2 + ax + a$ のグラフが直線 $y = x + 1$ と接するように、定数 a の値を定めよ。また、そのときの接点の座標を求めよ。

(2) k は定数とする。関数 $y = x^2 - 2kx$ のグラフと直線 $y = 2x - k^2$ の共有点の個数を調べよ。

8 [東京農業大]

次の連立不等式を解け。

$$\begin{cases} x^2 \leq 4 \\ 3x^2 - 2x > 1 \end{cases}$$

第8講 総復習問題

9

- (1) 放物線 $y = x^2 + mx + 1$ において、 x 軸と共有点をもたないように、定数 m の値の範囲を求めよ。
- (2) 2 次不等式 $x^2 - mx - 2m > 0$ の解がすべての実数であるとき、定数 m の値の範囲を求めよ。
- (3) すべての実数 x について、不等式 $x^2 + ax + a + 3 > 0$ が成り立つように、定数 a の値の範囲を求めよ。

10 [佛教大]

m を定数とする。2 次不等式 $mx^2 - 3x + m - 4 < 0$ がすべての実数 x で成り立つような m の値の範囲を求めよ。

11

2 次関数 $y = -x^2 + (m - 10)x - m - 14$ のグラフが次の条件を満たすとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

- (1) x 軸の正の部分と負の部分で交わる。 (2) x 軸の負の部分とのみ共有点をもつ。
- (3) x 軸の $x > 1$ の部分と、異なる 2 点で交わる。

章末問題A

1

次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = |x+2| - |x|$

(2) $y = |x+1| + 2|x-1|$

2

関数 $y = 2(x-1)(x+4)$ ($-3 < x < 3$) に最大値, 最小値があれば, それを求めよ。

3 [愛知工業大]

xy 平面において, 2 次関数 $y = 2x^2 + ax + b$ ($a > 0$) のグラフは x 軸と点 P で接し, y 軸と点 Q で交わるとする。線分 PQ の長さが $\sqrt{3}$ であるとき, a, b の値を求めよ。

4 [摂南大]

(1) $1 \leq x \leq 5$ の範囲で $x=2$ のとき最大値 2 をとり, 最小値が -1 である 2 次関数を求めよ。

(2) 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が, $f(-1) = f(3) = 0$ を満たし, その最大値が 4 であるとき, 定数 a, b, c の値を求めよ。

5 [京都文教大]

関数 $y = x^4 - 4x^3 + 8x$ を考える。 $t = x^2 - 2x$ とおくと $y = t^2 - \boxed{}t$ と表される。

$x = 1 + 2\sqrt{3}$ のとき $y = \boxed{}$ であり, $y = 5$ となる実数 x の値は $\boxed{}$ 個ある。

また, x が $0 \leq x \leq 3$ の範囲を動くとき, y のとりうる値の範囲は $\boxed{}$ である。

6 [北星学園大]

$x \geq 0, y \geq 0$ のとき, x, y の関数 $f(x, y) = x^2 - 4xy + 5y^2 + 2y + 2$ の最小値を求めよ。
また, このときの x, y の値を求めよ。

7 [北里大]

x が $0 \leq x \leq 5$ の範囲を動くとき, 関数 $f(x) = -x^2 + ax - a$ について考える。ただし, a は定数とする。

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2) $f(x)$ の最大値が 3 であるとき, a の値を求めよ。

章末問題A

8 [甲南大]

$f(x) = x^2 - 2x + 2$ とする。また、関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に 3, y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られるグラフを表す関数を $y = g(x)$ とする。

- (1) $g(x)$ の式を求め、 $y = g(x)$ のグラフをかけ。
- (2) $h(x)$ を次のように定める。

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \text{ のとき, } h(x) = f(x) \\ f(x) > g(x) \text{ のとき, } h(x) = g(x) \end{cases}$$

このとき、関数 $y = h(x)$ のグラフをかけ。

- (3) $a > 0$ とするとき、 $0 \leq x \leq a$ における $h(x)$ の最小値 m を a を用いて表せ。

9

a を定数とする x についての次の 3 つの 2 次方程式がある。

$$x^2 + ax + a + 3 = 0 \cdots \textcircled{1}, \quad x^2 - 2(a-2)x + a = 0 \cdots \textcircled{2}, \quad x^2 + 4x + a^2 - a - 2 = 0 \cdots \textcircled{3}$$

- (1) $\textcircled{1} \sim \textcircled{3}$ がいずれも実数解をもたないような a の値の範囲を求めよ。
- (2) $\textcircled{1} \sim \textcircled{3}$ の中で 1 つだけが実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

10 [福岡大]

関数 $y = |x(x-4)|$ のグラフと直線 $y = -\frac{9}{2}x + 4$ の 2 つの共有点のうち、 x 座標が正である点の座標を求めよ。

また、関数 $y = |x(x-4)|$ のグラフと直線 $y = ax + 4$ (a は定数) が 4 つの共有点をもつとき、 a の値の範囲を求めよ。

11

x のすべての実数の値に対して $(k^2 - 1)x^2 + 2(k+1)x + 3 > 0$ が成り立つように、 k の値の範囲を定めよ。

12

2 次不等式 $x^2 - (a+3)x + 3a < 0$ を満たす整数 x がちょうど 2 個だけあるように、定数 a の値の範囲を定めよ。

章末問題B

1 [北海道大]

実数 x に対して $k \leq x < k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ で表す。

例えば, $[2]=2$, $[\frac{5}{2}]=2$, $[-2.1]=-3$ である。

- (1) $n^2 - n - \frac{5}{4} < 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。
- (2) $[x]^2 - [x] - \frac{5}{4} < 0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。
- (3) x は (2) で求めた範囲にあるものとする。 $x^2 - [x] - \frac{5}{4} = 0$ を満たす x をすべて求めよ。

2

次の関数のグラフをかけ。ただし, $[a]$ は a を超えない最大の整数を表す。

- (1) $y = x - [x] \quad (-2 \leq x \leq 3)$
- (2) $y = x[x-1] \quad (-2 \leq x \leq 4)$

3 [東京電機大]

- (1) グラフの頂点が放物線 $y = 2x^2 + 6x + 4$ の頂点と一致し, 点 $(-1, -2)$ を通るような 2 次関数を求めよ。
- (2) 放物線 $y = 4x^2 + ax + b$ は点 $(1, 1)$ を通って x 軸に接するとする。この条件を満たす a, b の組をすべて求めよ。
- (3) 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ は, x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すると, 直線 $y = -x$ と直線 $y = 3x$ の両方に接する。 p, q の値を求めよ。

4 [岐阜聖徳学園大]

$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ のとき, $(x+y-1)^2 + (x-y+1)^2$ の最大値, 最小値を求めよ。

5 [神戸大]

a を実数とし, $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $g(x) = -x^2 + ax + a$ とする。

- (1) すべての実数 s, t に対して, $f(s) \geq g(t)$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ。
- (2) $0 \leq x \leq 1$ を満たすすべての x に対して, $f(x) \geq g(x)$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ。

章末問題B

6 [広島工業大]

a は定数とする。 x の関数を $f(x) = (x^2 + 2x + 2)^2 - 2a(x^2 + 2x + 2) + a$ とし、 $f(x)$ の最小値を m とする。

- (1) $t = x^2 + 2x + 2$ とおく。 x がすべての実数値をとって変化するとき、 t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) m を a を用いて表せ。

7 [同志社大]

$f(x) = x|x - a| - |x|$ (a は正の定数) について、次の問いに答えよ。

- (1) $y = f(x)$ のグラフの概形を図示せよ。
- (2) $a - 1 \leq x \leq a + 1$ での $f(x)$ の最大値 $M(a)$ を求めよ。

8 [近畿大]

k を実数の定数とする。 x についての2次方程式 $x^2 + kx + k^2 + 3k - 9 = 0$ …… ① について

- (1) 方程式①が実数解をもつとき、その解の値の範囲を求めよ。
- (2) 方程式①が異なる2つの整数解をもつような整数 k の値をすべて求めよ。

9 [学習院大]

$0 \leq x \leq 1$ であるすべての値に対して、 $x(x - 2a) \leq a^2$ が成り立つためには、実数 a はどんな範囲にあればよいか。

章末問題C

1 [芝浦工業大]

関数 $f(x) = (2-x)|x+1|$ に対して、 $t \leq x \leq t+1$ における $f(x)$ の最大値を $g(t)$ とおく。

- (1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。
- (2) 最大値 $g(t)$ を与える x の値が2つあるときの t の値を求めよ。
- (3) $g(t) = f(t)$ を満たす t の範囲を求めよ。

2 [千葉大]

a を実数とする。 x についての方程式 $|x^2 + ax + 2a| = a + 1$ が異なる実数解をちょうど2個もつような a の値の範囲を求めよ。

3 [慶応義塾大]

座標平面上の点 (x, y) が $x^2 - 2xy + 2y^2 = 4$ を満たして動くとき

- (1) $x + y$ の最大値と、最大値をとるときの x, y の値を求めよ。
- (2) $\frac{x}{y+4}$ の最大値と、最大値をとるときの x, y の値を求めよ。

4 [日本獣医生命科学大]

変数 x の範囲が実数全体であるとき、 $\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 1}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

5 [島根大]

a, b を異なる定数とし、2つの2次方程式

$$x^2 + ax + ab^2 = 0 \quad \cdots \cdots \text{①} \quad x^2 + bx + a^2b = 0 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

は共通の解をもつものとする。

- (1) ①と②のどちらか一方が重解をもつとき、共通の解を求めよ。
- (2) ①と②のどちらも重解をもたないとき、共通でない解の少なくとも一方は負であることを示せ。

6 [信州大]

a, b, c, d を正の実数とする。2次方程式 $x^2 - (a+b)x + ab - cd = 0$ について

- (1) 異なる2つの実数解をもつことを示せ。
- (2) 2つの解のうち少なくとも1つは必ず正の数であることを示せ。
- (3) 2つの解を α, β とし $0 < \alpha < \beta$ とするとき、 $a, a+b, \alpha, \beta$ の大小関係を示せ。

章末問題C

7 [防衛医科大学校]

実数 x についての連立不等式 $\begin{cases} x^2 - 2kx + k < 0 \\ kx^2 - 2x < 0 \end{cases}$ が解をもつような自然数 k は全部で何個あるか。

8 [滋賀県立大]

不等式 $ax^2 + y^2 + az^2 - xy - yz - zx \geq 0$ が任意の実数 x, y, z に対して成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

9

a を 2 以上の実数とし、 $f(x) = (x+a)(x+2)$ とする。このとき $f(f(x)) > 0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ。

10 [東京学芸大]

関数 $f(x)$ は次の 2 つの条件を満たす。

(A) $0 \leq x < 1$ のとき $f(x) = x$

(B) すべての実数 x に対して $f(x+1) = -f(x) + 1$ が成り立つ。

このとき、方程式 $f(x) - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0$ の解を求めよ。

11 [一橋大]

k は正の整数とする。 $5n^2 - 2kn + 1 < 0$ を満たす整数 n が、ちょうど 1 個であるような k をすべて求めよ。