

---

# 第 3 章

## ～ 三角比 ～

## 第1講 三角比

### 1 三角比

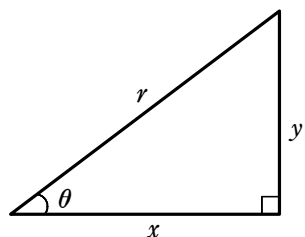
#### ① 正弦・余弦・正接

右の図の直角三角形において

$$1 \quad \sin \theta = \frac{y}{r} \text{ (正弦)}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \text{ (余弦)},$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \text{ (正接)}$$

$$2 \quad y = r \sin \theta, \quad x = r \cos \theta, \quad y = x \tan \theta$$



### 2 三角比の相互関係

#### ① 三角比の相互関係

$$1 \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad 2 \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad 3 \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

#### ② $90^\circ - \theta$ の三角比

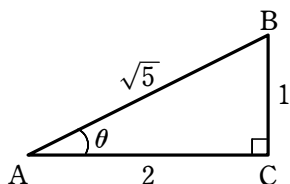
$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta, \quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta, \quad \tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$$

## 第1講 例題

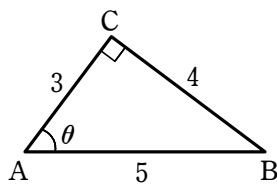
### 1 ★☆☆

下の図において、 $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  の値を、それぞれ求めよ。

(1)



(2)



### 2 ★★★

$\angle C = 90^\circ$  である直角三角形 ABC において、 $\angle A = \theta$ ,  $AB = k$  とする。頂点 C から辺 AB に下ろした垂線を CD とするとき、次の線分の長さを  $k$ ,  $\theta$  を用いて表せ。

(1) AC

(2) CD

(3) BD

### 3 ★☆☆

次の三角比を  $45^\circ$  以下の角の三角比で表せ。

(1)  $\sin 73^\circ$

(2)  $\cos 54^\circ$

(3)  $\tan 50^\circ$

### 4 ★★★★★

$\triangle ABC$  の  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$  の大きさを、それぞれ  $A$ ,  $B$ ,  $C$  で表すとき、等式

$$\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} \text{ が成り立つことを証明せよ。}$$

### 5 ★☆☆

$\theta$  は鋭角とする。

(1)  $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$  のとき、 $\cos \theta$  と  $\tan \theta$  の値を求めよ。

(2)  $\tan \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$  のとき、 $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  の値を求めよ。

### 6 ★★★

次の式の値を求めよ。

(1)  $(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2$

(2)  $(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta) - \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$

## 第1講 例題

---

7★★☆

$\theta$  は鋭角とする。 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$  のとき、次の式の値を求めよ。

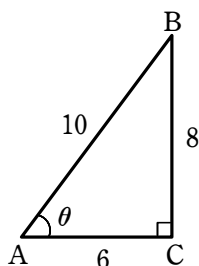
- (1)  $\sin \theta \cos \theta$                       (2)  $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$                       (3)  $\sin \theta - \cos \theta$

# 第1講 例題演習

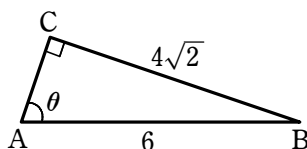
1

下の図において、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$  の値を求めよ。

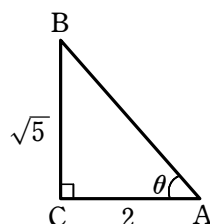
(1)



(2)



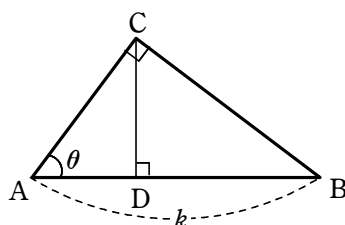
(3)



2

$\angle C = 90^\circ$  である直角三角形 ABC において、  
 $\angle A = \theta$ 、 $AB = k$  とする。頂点 C から辺 AB  
 に下ろした垂線を CD とするとき、次の線分の  
 長さを  $k$ 、 $\theta$  を用いて表せ。

- (1) BC      (2) AC      (3) AD  
 (4) CD      (5) BD



3

次の三角比を  $45^\circ$  以下の角の三角比で表せ。

- (1)  $\sin 52^\circ$       (2)  $\cos 47^\circ$       (3)  $\tan 71^\circ$

4

$\triangle ABC$  の  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  の大きさを、それぞれ  $A$ 、 $B$ 、 $C$  で表すとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

- (1)  $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$       (2)  $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B+C}{2} = 1$

5

$\theta$  は鋭角とする。 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$  のうち 1 つが次の値をとるとき、各場合について残りの 2 つの三角比の値を求めよ。

- (1)  $\sin \theta = \frac{5}{13}$       (2)  $\cos \theta = \frac{2}{3}$       (3)  $\tan \theta = 2\sqrt{2}$

## 第 1 講 例題演習

6

次の等式の左辺を計算して右辺を導け。

(1)  $\cos \theta \tan \theta = \sin \theta$

(2)  $(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) = \sin^2 \theta$

(3)  $\frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} = \sin^2 \theta$

(4)  $\frac{\sin \theta \cos \theta}{(1 + \sin \theta) \tan \theta} = 1 - \sin \theta$

(5)  $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$

(6)  $(\sin \theta + 2 \cos \theta)^2 + (2 \sin \theta - \cos \theta)^2 = 5$

7

$\theta$  は鋭角とする。 $\sin \theta - \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  のとき、次の式の値を求めよ。

(1)  $\sin \theta \cos \theta$

(2)  $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$

(3)  $\sin \theta + \cos \theta$

## 第 1 講 レベル A

1

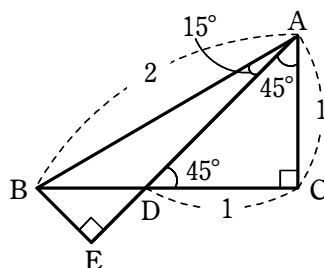
目の高さが 1.5 m の人が，平地に立っている木の高さを求めるために，木の前方の地点 A から測った木の頂点の仰角が  $30^\circ$ ，A から木に向かって 10 m 近づいた地点 B から測った仰角が  $45^\circ$  であった。木の高さを求めよ。

2

右の図を利用して，次の値を求めよ。

$$\sin 15^\circ, \quad \cos 15^\circ, \quad \tan 15^\circ$$

$$\sin 75^\circ, \quad \cos 75^\circ, \quad \tan 75^\circ$$



3

$0^\circ < \theta < 90^\circ$  とする。 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 3$  のとき，次の式の値を求めよ。

(1)  $\sin \theta \cos \theta$

(2)  $\sin \theta + \cos \theta$

(3)  $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

(4)  $\frac{1}{\sin^3 \theta} + \frac{1}{\cos^3 \theta}$

1

- (1)  $\theta$  は鋭角とする。 $\tan \theta = \sqrt{7}$  のとき、 $(\sin \theta + \cos \theta)^2$  の値を求めよ。
- (2)  $\tan^2 \theta + (1 - \tan^4 \theta)(1 - \sin^2 \theta)$  の値を求めよ。
- (3)  $\frac{\sin^4 \theta + 4\cos^2 \theta - \cos^4 \theta + 1}{3(1 + \cos^2 \theta)}$  の値を求めよ。



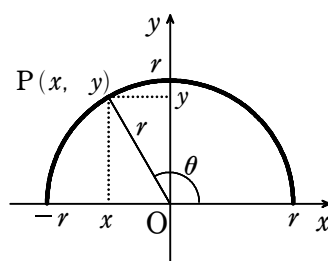
## 第2講 三角比の拡張

### 3 三角比の拡張

#### ① 座標を用いた三角比の定義 ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ )

右の図で,  $\angle AOP = \theta$ ,  $OP = r$ ,  $P(x, y)$

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$



#### ② 三角比の符号 ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ )

| $\theta$      | $0^\circ$ | 鋭角 | $90^\circ$ | 鈍角 | $180^\circ$ | とる値の範囲                       |
|---------------|-----------|----|------------|----|-------------|------------------------------|
| $\sin \theta$ | 0         | +  | 1          | +  | 0           | $0 \leq \sin \theta \leq 1$  |
| $\cos \theta$ | 1         | +  | 0          | -  | -1          | $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ |
| $\tan \theta$ | 0         | +  | /          | -  | 0           | 実数全体                         |

#### ③ $180^\circ - \theta$ の三角比

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta, \quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta, \quad \tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

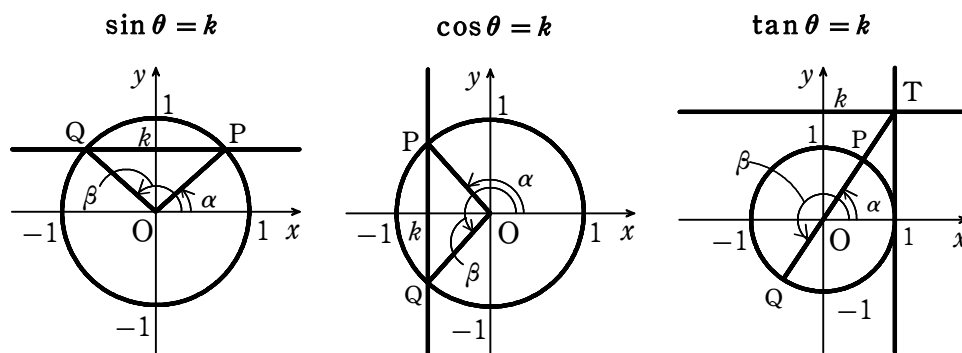
#### ④ 三角比の相互関係 ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ )

$$1 \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad 2 \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad 3 \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

### 4 三角比の応用

#### ① 三角比を含む方程式, 不等式

三角比を含む方程式, 不等式は, 単位円を利用して解く。



#### ② 三角比を含む関数の最大値, 最小値

- 三角比を  $t$  で置き換え,  $t$  の関数とみて, 最大値, 最小値を求める。
- $\sin \theta = t$ ,  $\cos \theta = t$  など置き換えたときは,  $\theta$  の範囲に注意して,  $t$  のとりうる値の範囲を考える。

## 第2講 例題

### 1 ★☆☆

- (1)  $120^\circ$  の正弦, 余弦, 正接の値を求めよ。  
(2)  $180^\circ$  の正弦, 余弦, 正接の値を求めよ。

### 2 ★★☆☆

次の式を簡単にせよ。

- (1)  $\cos 170^\circ + \cos 70^\circ + \sin 80^\circ - \sin 160^\circ$   
(2)  $\tan 145^\circ \tan 55^\circ - 3 \tan 155^\circ \tan 65^\circ$

### 3 ★☆☆

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。 $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  のうち1つが次の値をとるとき, 各場合について残りの2つの三角比の値を求めよ。

- (1)  $\cos \theta = -\frac{2}{3}$                       (2)  $\sin \theta = \frac{2}{7}$                       (3)  $\tan \theta = -\frac{4}{3}$

### 4 ★★☆☆

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき, 次の等式を満たす  $\theta$  を求めよ。

- (1)  $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$                       (2)  $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$                       (3)  $\tan \theta = -1$   
(4)  $2 \sin \theta - 1 = 0$                       (5)  $3 \tan \theta = \sqrt{3}$

### 5 ★★☆☆

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。次の不等式を満たす  $\theta$  の範囲を求めよ。

- (1)  $\sin \theta \leq \frac{1}{2}$                       (2)  $\cos \theta > -\frac{\sqrt{2}}{2}$                       (3)  $\tan \theta \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$

### 6 ★★☆☆

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  において,  $\sin^2 \theta - \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} = 0$  を満たす  $\theta$  の値を求めよ。

### 7 ★★★★★

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき, 次の不等式を解け。

- (1)  $2 \sin^2 \theta - 3 \cos \theta > 0$                       (2)  $4 \cos^2 \theta + (2 + 2\sqrt{2}) \sin \theta > 4 + \sqrt{2}$

## 第2講 例題

---

8 ★★★

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき、 $y = 4\sin^2 \theta + 4\cos \theta + 3$  の最大値と最小値、およびそのときの  $\theta$  の値を求めよ。

## 第2講 例題演習

1

次の表を完成せよ。

|     | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ | $180^\circ$ |
|-----|-----------|------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| sin |           |            |            |            |            |             |             |             |             |
| cos |           |            |            |            |            |             |             |             |             |
| tan |           |            |            |            |            |             |             |             |             |

2

次の式を簡単にせよ。

- (1)  $\cos 160^\circ - \cos 110^\circ + \sin 70^\circ - \sin 20^\circ$       (2)  $\sin 140^\circ \sin 50^\circ + \cos 40^\circ \cos 130^\circ$   
 (3)  $\sin 10^\circ \cos 80^\circ - \sin 100^\circ \cos 170^\circ$       (4)  $(\tan 25^\circ + \tan 65^\circ)^2 - (\tan 155^\circ - \tan 115^\circ)^2$

3

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。 $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  のうち, 1 つが次の値をとるとき, 各場合について他の 2 つの値を求めよ。

- (1)  $\sin \theta = \frac{3}{4}$       (2)  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$   
 (3)  $\tan \theta = -3$       (4)  $\cos \theta = \frac{1}{5}$

4

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき, 次の等式を満たす  $\theta$  を求めよ。

- (1)  $\sin \theta = 1$       (2)  $\cos \theta = \frac{1}{2}$       (3)  $\tan \theta = \sqrt{3}$   
 (4)  $2\sin \theta = \sqrt{2}$       (5)  $\sqrt{2}\cos \theta + 1 = 0$       (6)  $\sqrt{3}\tan \theta + 1 = 0$

5

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。次の不等式を満たす  $\theta$  の値の範囲を求めよ。

- (1)  $\sin \theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$       (2)  $\sin \theta < \frac{1}{2}$       (3)  $\cos \theta \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 (4)  $\cos \theta < -\frac{1}{\sqrt{2}}$       (5)  $0 < \tan \theta \leq 1$       (6)  $\tan \theta \geq \sqrt{3}$   
 (7)  $1 < 2\sin \theta \leq \sqrt{3}$       (8)  $1 \leq -2\cos \theta < \sqrt{3}$       (9)  $-1 < \sqrt{3}\tan \theta < 3$

## 第2講 例題演習

---

6

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき、次の等式を満たす  $\theta$  を求めよ。

(1)  $4\sin^2 \theta - 4\cos \theta - 1 = 0$

(2)  $2\cos^2 \theta + 3\sin \theta - 3 = 0$

7

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき、次の不等式を解け。

(1)  $2\sin^2 \theta - \cos \theta - 1 \leq 0$

(2)  $2\cos^2 \theta + 3\sin \theta < 3$

8

次の関数の最大値と最小値、およびそのときの  $\theta$  の値を求めよ。

(1)  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき  $y = \cos^2 \theta - 2\sin \theta - 1$

(2)  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  のとき  $y = 2\sin^2 \theta - 8\sin \theta + 5$

(3)  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき  $y = \sin^2 \theta - \cos \theta$

## 第2講 レベルA

1

次の式のとりうる値の範囲を求めよ。(1)～(4)では $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

- (1)  $\sin \theta + 2$                       (2)  $2\cos \theta$                       (3)  $2\sin \theta - 1$                       (4)  $-3\cos \theta + 1$   
(5)  $2\tan \theta + 1$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ )                      (6)  $\tan^2 \theta + 1$  ( $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ )

2

次の式の値を求めよ。

- (1)  $\cos(90^\circ - \theta) \sin(180^\circ - \theta) - \sin(90^\circ - \theta) \cos(180^\circ - \theta)$   
(2)  $\cos^2 \theta + \cos^2(90^\circ - \theta) + \cos^2(90^\circ + \theta) + \cos^2(180^\circ - \theta)$   
(3)  $\cos 56^\circ \cos 124^\circ + \sin 56^\circ \cos 146^\circ$   
(4)  $\frac{1}{\sin^2 40^\circ} - \tan^2 130^\circ$

3

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\cos \theta + \sin \theta = \frac{1}{2}$ のとき、次の値を求めよ。

- (1)  $\sin \theta$                                       (2)  $\cos \theta$                                       (3)  $\tan \theta$

4

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、 $y = \sin^4 \theta + \cos^4 \theta$ とする。 $\sin^2 \theta = t$ とおくと、

$y = \text{ア} \boxed{\phantom{000}} t^2 - \text{イ} \boxed{\phantom{000}} t + \text{ウ} \boxed{\phantom{000}}$ と表されるから、 $y$ は $\theta = \text{エ} \boxed{\phantom{000}}$ のとき最大値

$\text{オ} \boxed{\phantom{000}}$ 、 $\theta = \text{カ} \boxed{\phantom{000}}$ のとき最小値  $\text{キ} \boxed{\phantom{000}}$ をとる。

## 第2講 レベルB

1

$0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ ,  $0^\circ \leq y \leq 180^\circ$  とする。

連立方程式  $\cos^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2}$ ,  $\sin x \cos(180^\circ - y) = -\frac{3}{4}$  を解け。

2 [愛知大]

$a$  は定数とする。関数  $f(\theta) = \sin^2 \theta + a \cos \theta + 1$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ) について

- (1)  $0 < a < 2$  において、 $f(\theta)$  の最大値が  $\frac{5}{2}$  となるような  $a$  の値、およびこの最大値を与える  $\theta$  の値を求めよ。
- (2)  $a \geq 2$  のとき、 $f(\theta)$  の最大値と最小値、およびこれらを与える  $\theta$  の値をそれぞれ求めよ。

3 [岐阜大]

$0^\circ < \theta < 180^\circ$  とする。 $x$  の2次方程式  $x^2 - 4(\cos \theta)x - 2(1 + \sqrt{3})\sin \theta + 4 + \sqrt{3} = 0$  を考える。

- (1) この2次方程式が異なる2つの実数解をもつような  $\theta$  の値の範囲を求めよ。
- (2) 不等式  $-2(1 + \sqrt{3})\sin \theta + 4 + \sqrt{3} > 0$  が常に成り立つことを示せ。
- (3) この2次方程式が異なる2つの実数解をもち、それらがともに負となるような  $\theta$  の値の範囲を求めよ。

### 第3講 正弦定理・余弦定理

#### 5 正弦定理・余弦定理

##### 1 正弦定理

$\triangle ABC$  の外接円の半径を  $R$  とすると 
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

##### 2 余弦定理

$\triangle ABC$  において、次が成り立つ。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$b^2 + c^2 > a^2 \iff A \text{ は鋭角}, \quad b^2 + c^2 = a^2 \iff A \text{ は直角},$$

$$b^2 + c^2 < a^2 \iff A \text{ は鈍角}$$

#### 6 正弦定理と余弦定理の応用

##### 1 三角形の辺と角

三角形の6つの要素(3辺, 3つの角)のうち, 少なくとも1つの辺を含む3つの要素が与えられたとき, 残りの要素を求めることができる。

##### 2 三角形の辺と角の大小関係

三角形の2辺の大小関係は, その向かい合う角の大小関係と一致する。

$$\triangle ABC \text{ において, たとえば } b < c \iff B < C$$

三角形の最大の辺に向かい合う角が, その三角形の最大の角である。

#### 参考 三角形の存在条件

正の数  $a, b, c$  を3辺の長さとする三角形が存在するための条件は,  $|b - c| < a < b + c$  が成り立つことである。

**参考** 3辺の長さ  $a, b, c$  の中で,  $a$  が最大であれば, 三角形が存在するための条件は,  $a < b + c$  が成り立つことである。



### 第3講 例題

---

#### 1 ★☆☆

△ABCにおいて、外接円の半径を  $R$  とする。次のものを求めよ。

- (1)  $a = \sqrt{2}$ ,  $A = 45^\circ$ ,  $B = 120^\circ$  のとき  $b$
- (2)  $b = 15$ ,  $c = 15\sqrt{3}$ ,  $B = 30^\circ$  のとき  $C$
- (3)  $a = 5\sqrt{3}$ ,  $A = 150^\circ$  のとき  $R$
- (4)  $b = 5$ ,  $R = 5$  のとき  $B$

#### 2 ★☆☆

- (1) △ABCにおいて、 $b = 3$ ,  $c = \sqrt{2}$ ,  $A = 45^\circ$  のとき、 $a$  を求めよ。
- (2) △ABCにおいて、 $a = 5$ ,  $b = 7$ ,  $c = 8$  のとき、 $B$  を求めよ。

#### 3 ★★★

△ABCにおいて、 $a = 2$ ,  $b = \sqrt{6}$ ,  $B = 60^\circ$  のとき、 $c$  を求めよ。

#### 4 ★★★

△ABCにおいて、 $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ ,  $b = 2$ ,  $C = 45^\circ$  のとき、残りの辺の長さや角の大きさを求めよ。

#### 5 ★★★

△ABCにおいて、 $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 8 : 7$  のとき、次のものを求めよ。

- (1)  $a : b : c$
- (2) △ABCの内角のうち、2番目に大きい角の大きさ

#### 6 ★★★

次の等式が成り立つとき、△ABCはどのような形をしているか。

- (1)  $b \sin B = c \sin C$
- (2)  $a \cos A + b \cos B = c \cos C$

### 第3講 例題演習

1

$\triangle ABC$ において、次のものを求めよ。

- (1)  $A=120^\circ$ , 外接円の半径  $R=10$  のとき  $a$
- (2)  $a=12$ ,  $B=60^\circ$ ,  $C=75^\circ$  のとき  $b$
- (3)  $a=1$ ,  $c=\sqrt{3}$ ,  $C=120^\circ$  のとき  $A$
- (4)  $b=5$ , 外接円の半径  $R=5$  のとき  $B$
- (5)  $A=50^\circ$ ,  $B=100^\circ$ ,  $c=5$  のとき, 外接円の半径  $R$

2

$\triangle ABC$ において、次のものを求めよ。

- (1)  $a=6$ ,  $c=4$ ,  $B=60^\circ$  のとき  $b$
- (2)  $A=120^\circ$ ,  $b=2\sqrt{2}-1$ ,  $c=2\sqrt{2}+1$  のとき  $a$
- (3)  $a=13$ ,  $b=7$ ,  $c=15$  のとき  $A$
- (4)  $a=1+\sqrt{3}$ ,  $b=\sqrt{2}$ ,  $c=2$  のとき  $C$

3

$\triangle ABC$ において、次のものを求めよ。

- (1)  $b=\sqrt{2}$ ,  $c=2$ ,  $B=30^\circ$  のとき  $a$
- (2)  $a=2\sqrt{6}$ ,  $b=4$ ,  $A=60^\circ$  のとき  $c$

4

次の各場合について、 $\triangle ABC$ の残りの辺の長さや角の大きさを求めよ。

- (1)  $a=\sqrt{3}$ ,  $B=45^\circ$ ,  $C=15^\circ$
- (2)  $b=2$ ,  $c=\sqrt{3}+1$ ,  $A=30^\circ$

5

$\triangle ABC$ において、 $\sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{5}$  のとき、この三角形の最も大きい角の大きさを求めよ。

6 [宮城教育大]

$\triangle ABC$ において、次の等式が成り立つとき、この三角形はどのような形か。

- (1)  $a \sin A = b \sin B$
- (2)  $(\sin A + \sin B + \sin C)(b + c - a) = 2c \sin B$
- (3)  $\frac{\cos A}{a} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\cos C}{c}$
- (4)  $\sin A \cos A = \sin B \cos B + \sin C \cos C$

### 第3講 レベルA

1

$\triangle ABC$ において、 $a=\sqrt{2}$ 、 $b=2$ 、 $A=30^\circ$ のとき、 $c$ 、 $B$ 、 $C$ を求めよ。

2

平たんな土地の上に4つの地点A、B、C、Dがある。A地点の真西にC地点がある。A地点の北西側にB地点があり $\angle BAC = \angle ACB = 30^\circ$ 、 $AB=500$  mである。また、A地点の南西側にD地点があり $\angle ADB = 60^\circ$ 、 $\angle ABD = 45^\circ$ である。このとき、距離AC、AD、DCを求めよ。

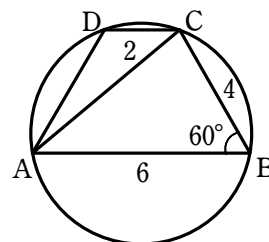
3

$\triangle ABC$ において、辺BCの中点をM、辺BCを1:2に分ける点をDとする。 $a=6$ 、 $b=5$ 、 $c=7$ のとき、AM、ADの長さを求めよ。

4

右の図のように円に内接する四角形ABCDがある。 $AB=6$ 、 $BC=4$ 、 $CD=2$ 、 $\angle ABC=60^\circ$ である。

- (1) 対角線ACの長さを求めよ。
- (2) 辺ADの長さを求めよ。



5

$\triangle ABC$ において、 $\frac{\sin A}{\sqrt{7}} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \sin C$ が成り立つとき

- (1)  $\triangle ABC$ の内角のうち、最も大きい角の大きさを求めよ。
- (2)  $\triangle ABC$ の内角のうち、2番目に大きい角の正接を求めよ。

6

$\triangle ABC$ において、次の等式が成り立つことを証明せよ。

- (1)  $c(\sin^2 A + \sin^2 B) = (a \sin A + b \sin B) \sin C$
- (2)  $2(bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C) = a^2 + b^2 + c^2$

### 第3講 レベルB

---

#### 1 [日本工業大]

$x > 1$  とする。三角形の3辺の長さがそれぞれ  $x^2 - 1$ ,  $2x + 1$ ,  $x^2 + x + 1$  であるとき、この三角形の最大の角の大きさを求めよ。

#### 2 [福岡大]

$\triangle ABC$  の3辺の長さが、 $BC = a$ ,  $CA = 3a - 2$ ,  $AB = 5a - 4$  であるとき、 $a$  の値の範囲を求めると  $\boxed{\phantom{00}}$  である。

また、 $\triangle ABC$  が鈍角三角形で外接円の半径が  $\frac{\sqrt{3}}{3}(5a - 4)$  ならば、 $a = \boxed{\phantom{00}}$  である。

#### 3

$\triangle ABC$  において、辺  $BC$  の中点を  $M$  とする。

- (1)  $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$  (中線定理) が成り立つことを証明せよ。
- (2)  $AB = 9$ ,  $BC = 8$ ,  $CA = 7$  のとき、線分  $AM$  の長さを求めよ。

## 第4講 面積・空間図形

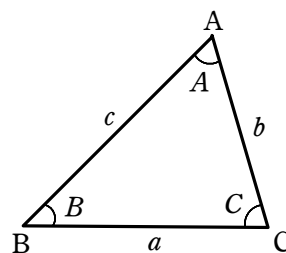
### 7 三角形の面積

#### 1 三角形の面積

$\triangle ABC$  の面積  $S$  は、次の式で表される。

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A, \quad S = \frac{1}{2}ca \sin B,$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C$$



#### 2 三角形の内接円と面積

$\triangle ABC$  の面積を  $S$ ，内接円の半径を  $r$  とすると  $S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$

#### 発展 ヘロンの公式

##### 1 ヘロンの公式

3 辺の長さが  $a$ ， $b$ ， $c$  である  $\triangle ABC$  の面積  $S$  は

$$2s = a + b + c \text{ とすると } S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

### 8 空間図形への応用

#### 1 空間図形への応用

1 線分の長さや角の大きさは、三角形の辺や角としてとらえ、三平方の定理や正弦定理、余弦定理を利用する。

2 角錐の体積 底面積  $S$ ，高さ  $h$  の角錐の体積  $V$  は  $V = \frac{1}{3}Sh$

## 第4講 例題

### 1 ★☆☆

次のような  $\triangle ABC$  の面積  $S$  を求めよ。

- (1)  $a=10, b=7, C=150^\circ$                       (2)  $a=5, b=9, c=8$

### 2 ★★★

次のような四角形  $ABCD$  の面積を求めよ。

- (1)  $\angle A=135^\circ, \angle C=45^\circ, AB=1, BC=3, CD=\sqrt{2}, DA=\sqrt{2}$   
 (2)  $\angle B=120^\circ, AB=3, BC=5, CD=5, DA=4$

### 3 ★★★

三角形  $ABC$  において,  $a=5, b=7, c=4$  であるならば,  $\cos A = \overset{\text{ア}}{\square}$ ,

$\sin A = \overset{\text{イ}}{\square}$  であり, 三角形  $ABC$  の面積  $S$  は  $\overset{\text{ウ}}{\square}$  である。そして, 三角形

$ABC$  の外接円の半径  $R$  は  $\overset{\text{エ}}{\square}$  であり, 内接円の半径  $r$  は  $\overset{\text{オ}}{\square}$  である。

### 4 ★★★

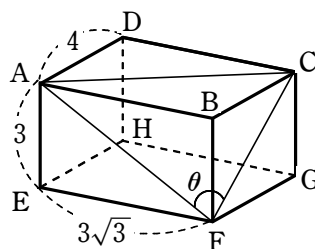
円に内接する四角形  $ABCD$  において  $AB=2, BC=4, CD=3, DA=3$  であるとする。  
 次のものを求めよ。

- (1)  $BD$  の長さ                      (2) 四角形  $ABCD$  の面積

### 5 ★★★

右の図のように  $AE=3, AD=4, EF=3\sqrt{3}$  である  
 直方体  $ABCD-EFGH$  がある。  $\angle AFC=\theta$  とするとき, 次のものを求めよ。

- (1)  $\cos \theta$  の値                      (2)  $\sin \theta$  の値  
 (3)  $\triangle AFC$  の面積

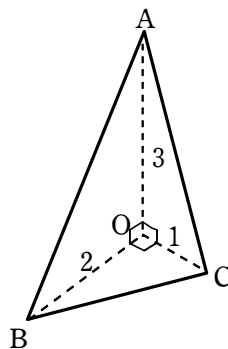


## 第4講 例題

### 6 ★★☆☆

右の図のような四面体  $OABC$  があり、3 辺  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  は互いに垂直で、 $OA=3$ ,  $OB=2$ ,  $OC=1$  である。

- (1) この四面体の体積  $V$  を求めよ。
- (2)  $\triangle ABC$  の面積  $S$  を求めよ。
- (3) 頂点  $O$  から平面  $ABC$  へ下ろした垂線  $OH$  の長さを求めよ。



## 第4講 例題演習

1

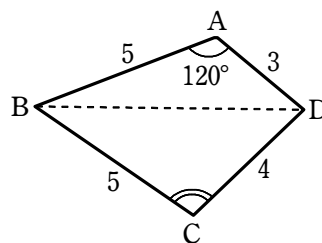
次のような  $\triangle ABC$  の面積を求めよ。

- (1)  $b=7, c=8, A=45^\circ$                       (2)  $a=2\sqrt{2}, c=\sqrt{6}, B=150^\circ$   
 (3)  $a=1+\sqrt{3}, b=\sqrt{2}, A=105^\circ, B=30^\circ$   
 (4)  $a=11, b=6, c=7$                       (5)  $a=\sqrt{5}, b=2, c=3$

2

右の図のような四角形 ABCD において、次のものを求めよ。

- (1) BD の長さ                      (2)  $\cos C$  の値  
 (3) 四角形 ABCD の面積



3

$\triangle ABC$  において、 $a=4, b=5, c=6$  であるならば、 $\cos A = \frac{\square}{\square}$ ,

$\sin A = \frac{\square}{\square}$  であり、 $\triangle ABC$  の面積  $S$  は  $\frac{\square}{\square}$  である。また、 $\triangle ABC$  の内接円の半径  $r$  は  $\frac{\square}{\square}$ , 外接円の半径  $R$  は  $\frac{\square}{\square}$  である。

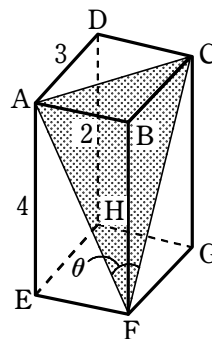
4

円に内接する四角形 ABCD がある。AB=8, BC=3, CD=5, DA=5 であるとき、A と対角線 BD の長さを求めよ。また、四角形 ABCD の面積  $S$  を求めよ。

5

右の図のような、 $AB=2, AD=3, AE=4$  である直方体 ABCD-EFGH がある。 $\angle AFC = \theta$  とするとき、次の値を求めよ。

- (1)  $\cos \theta$  の値      (2)  $\sin \theta$  の値      (3)  $\triangle AFC$  の面積





## 第4講 例題演習

6

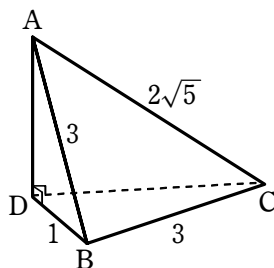
四面体 ABCD において,

$$AB = BC = 3, CA = 2\sqrt{5}, BD = 1,$$

$$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$$

であるとき, 次のものを求めよ。

- (1) CD の長さ
- (2) 四面体 ABCD の体積
- (3)  $\triangle ABC$  の面積
- (4) 頂点 D から平面 ABC へ下ろした垂線 DH の長さ



## 第4講 レベルA

1

円に内接する四角形 ABCD において、 $AB=4$ 、 $BC=3\sqrt{2}$ 、 $CD=2$ 、 $\angle B=45^\circ$  とする。  
次の値を求めよ。

- (1) AC の長さ                      (2) AD の長さ                      (3) 四角形 ABCD の面積

2

$\triangle ABC$  において、 $b=15$ 、 $c=10$ 、 $A=60^\circ$  とする。 $\angle A$  の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき、AD の長さを求めよ。

3

1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC があり、辺 AB、CA 上にそれぞれ頂点と異なる点 D、E を  $AD=CE$  となるようにとる。四角形 DBCE の面積を  $S$  とする。

- (1) DE の最小値を求めよ。  
(2)  $S$  の最小値とそのときの AD の長さを求めよ。

4 [西南学院大]

三角形 ABC において、 $\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$  とする。

- (1)  $A, B, C$  のうち最大の角を  $\theta$  とするとき、 $\cos \theta = \sqrt{\quad}$  である。  
(2) 三角形 ABC の面積が  $60\sqrt{3}$  であるとき、辺 BC の長さは  $\sqrt[4]{\quad}$  である。

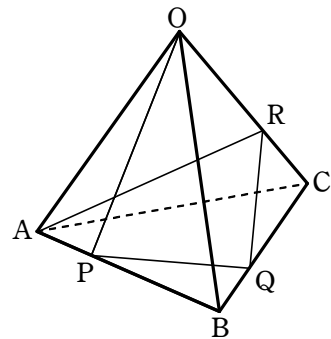
また、三角形 ABC の内接円の面積は  $\sqrt{\quad}$  である。

5 [法政大]

1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において、辺 AC 上の点 P と辺 AD 上の点 Q が  $CP=AQ=\frac{1}{3}$  を満たすとき、 $\triangle BPQ$  の周の長さは  $\sqrt{\quad}$  で、面積は  $\sqrt[4]{\quad}$ 。

6

1 辺の長さが  $a$  の正四面体  $OABC$  において，辺  $AB$ ， $BC$ ， $OC$  上にそれぞれ点  $P$ ， $Q$ ， $R$  をとる。頂点  $O$  から， $P$ ， $Q$ ， $R$  の順に 3 点を通り，頂点  $A$  に至る最短経路の長さを求めよ。



## 第4講 レベルB

### ① [北海道薬科大]

$\triangle ABC$ において、 $AB=\sqrt{2}$ 、 $\angle A=135^\circ$ 、 $\angle C=30^\circ$ とする。 $\triangle ABC$ の外接円の中心を  $O$  とし、線分  $AO$  の延長線とこの外接円との交点を  $D$  とする。このとき、

$AD=\overset{ア}{\square}$ 、 $BC=\overset{イ}{\square}$ 、 $BD=\overset{ウ}{\square}$ 、 $AC=\overset{エ}{\square}$  である。また、四角形

$ABOC$  の面積を  $S_1$ 、四角形  $ABDC$  の面積を  $S_2$  とおくと、 $S_1=\overset{オ}{\square}$ 、

$\frac{S_2}{S_1}=\overset{カ}{\square}$  である。

### ② [北海道大]

1 辺の長さが 3 の正三角形  $ABC$  を底面とする四面体  $PABC$  を考える。

$$PA=PB=PC=2$$

とする。

- (1) 四面体  $PABC$  の体積を求めよ。
- (2) 辺  $AB$  上の点  $E$  と辺  $AC$  上の点  $F$  が

$$AE=AF, \cos \angle EPF = \frac{4}{5}$$

を満たすとき、 $AE$  の長さを求めよ。

### ③

四面体  $ABCD$  があり、 $AB=2$ 、 $BC=\sqrt{7}$ 、 $CA=3$ 、 $AD=BD=CD=4$  である。この四面体の体積  $V$  を求めよ。