

1 [2022 鹿児島大]

(解説)

(1) 大きいさいころ, 小さいさいころの出る目をそれぞれ A, B とすると

$$X = 10A + B, Y = 10B + A$$

$$\text{よって } X - Y = 10A + B - (10B + A) = 9(A - B)$$

$$X - Y > 0 \text{ から } A - B > 0 \quad \text{すなわち} \quad A > B$$

$A > B$ を満たす A, B の組 (A, B) は

$$(2, 1)$$

$$(3, 1), (3, 2)$$

$$(4, 1), (4, 2), (4, 3)$$

$$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)$$

$$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)$$

の 15 通りである。

$$\text{ゆえに } P(X - Y > 0) = \frac{15}{6^2} = \frac{5}{12}$$

$$(2) \quad E(A) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } V(A) &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ &= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} \end{aligned}$$

$$E(B) = E(A) = \frac{7}{2} \text{ であるから}$$

$$E(X) = E(10A + B) = 10E(A) + E(B) = 11 \times \frac{7}{2} = \frac{77}{2}$$

$$V(B) = V(A) = \frac{35}{12} \text{ であり, 確率変数 } A, B \text{ は互いに独立であるから}$$

$$V(X) = V(10A + B) = 10^2 V(A) + V(B) = 101 \times \frac{35}{12} = \frac{3535}{12}$$

$$(3) \quad V(B) = V(A) = \frac{35}{12} \text{ であり, 確率変数 } A, B \text{ は互いに独立であるから}$$

$$V(X - Y) = V(9A - 9B) = 9^2 V(A) + (-9)^2 V(B) = \frac{9^2 \cdot 35}{6}$$

$$\text{したがって } \sigma(X - Y) = \sqrt{\frac{9^2 \cdot 35}{6}} = \frac{3\sqrt{210}}{2}$$

2 [2018 神戸大]

解説

(1) $f(x) = \frac{2e^{3x}}{e^{2x}+1}$ であるから

$$f'(x) = \frac{6e^{3x}(e^{2x}+1) - 2e^{3x} \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{2e^{5x} + 6e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2} > 0$$

よって, $f(x)$ はすべての実数 x で単調に増加する。

ゆえに, $a < b$ ならば $f(a) < f(b)$ が成り立つ。

また, $e^{2\log \sqrt{3}} = e^{\log 3} = 3$, $e^{3\log \sqrt{3}} = e^{\log 3\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$ であるから

$$f(\log \sqrt{3}) = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{3+1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(2) $g(x)$ は $f(x)$ の逆関数であるから, $t = g(x)$ とおくと $x = f(t)$

よって $dx = f'(t)dt$

また, $f(0) = 1$ であるから, (1) より

$$\int_1^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} g(x)dx = \int_0^{\log \sqrt{3}} tf'(t)dt$$

$$\begin{aligned} &= \left[tf(t) \right]_0^{\log \sqrt{3}} - \int_0^{\log \sqrt{3}} f(t)dt \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \log \sqrt{3} - \int_0^{\log \sqrt{3}} f(t)dt \end{aligned}$$

x	$1 \rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}$
t	$0 \rightarrow \log \sqrt{3}$

ここで, $\int_0^{\log \sqrt{3}} f(t)dt$ について, $u = e^t$ とおくと $du = e^t dt$

ゆえに $\int_0^{\log \sqrt{3}} f(t)dt = \int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{2e^{2t}}{e^{2t}+1} \cdot e^t dt$

$$= 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{u^2+1} du$$

$$= 2 \int_1^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{u^2+1} \right) du = 2 \int_1^{\sqrt{3}} du - 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1} du$$

$$= 2 \left[u \right]_1^{\sqrt{3}} - 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1} du = 2(\sqrt{3}-1) - 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1} du$$

t	$0 \rightarrow \log \sqrt{3}$
u	$1 \rightarrow \sqrt{3}$

ここで, $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1} du$ について, $u = \tan \theta$ とおくと $du = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$

$$\begin{aligned}
 \text{よって} \quad \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1} du &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \left[\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}
 \end{aligned}$$

u	$1 \rightarrow \sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned}
 \text{したがって} \quad \int_1^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} g(x) dx &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \log \sqrt{3} - \left\{ 2(\sqrt{3} - 1) - 2 \cdot \frac{\pi}{12} \right\} \\
 &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \log 3 - 2\sqrt{3} + 2 + \frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$

3 [2018 大阪大]

(解説)

(1) $(n+1)$ 試合目に A が勝つ確率を、次の 2 つの場合に分けて考える。

[1] n 試合目に A が勝つとき

このときの確率は pa_n

[2] n 試合目に B が勝つとき

このときの確率は $q(1-a_n)$

[1], [2] から $a_{n+1} = pa_n + q(1-a_n)$

すなわち $a_{n+1} = (p-q)a_n + q \dots\dots ①$

ここで、 $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ であるから $1-p+q > 0$

ゆえに、①を変形すると $a_{n+1} - \frac{q}{1-p+q} = (p-q)\left(a_n - \frac{q}{1-p+q}\right)$

また $a_1 - \frac{q}{1-p+q} = p - \frac{q}{1-p+q} = \frac{(1-p)(p-q)}{1-p+q}$

よって、数列 $\left\{a_n - \frac{q}{1-p+q}\right\}$ は初項 $\frac{(1-p)(p-q)}{1-p+q}$ 、公比 $p-q$ の等比数列である。

ゆえに $a_n - \frac{q}{1-p+q} = \frac{(1-p)(p-q)}{1-p+q} (p-q)^{n-1}$

したがって $a_n = \frac{(1-p)(p-q)^{n-1} + q}{1-p+q}$

(2) 次のように場合分けをして考える。

[1] B が $1 \sim (n-2)$ 回目のうちに 1 回勝ち、 n 回目に勝つとき

$1 \sim (n-2)$ 回目のうち、B の勝ち方は ${}_{n-2}C_1$ 通り

よって、このときの確率は ${}_{n-2}C_1 \times (1-p)^2 p^{n-3} q = (n-2)(1-p)^2 p^{n-3} q$

$$\begin{array}{ccccccc} A & A & \cdots & A & B & A & \cdots & A & B \\ p & p & & p & \uparrow & q & & p & \uparrow \\ & & & & 1-p & & & & 1-p \end{array}$$

[2] B が $1 \sim (n-1)$ 回目のうちに連続せずに 2 回勝つとき

$n \geq 4$ のときを考える。

$1 \sim (n-1)$ 回目のうち、B の勝ち方は ${}_{n-1}C_2$ 通り

このうち、B が連続して 2 回勝つのは ${}_{n-2}C_1$ 通り

よって、このときの確率は

$$\begin{aligned} & ({}_{n-1}C_2 - {}_{n-2}C_1) \times (1-p)^2 p^{n-4} q^2 \\ &= \frac{(n-2)(n-3)(1-p)^2 p^{n-4} q^2}{2} \dots\dots ② \end{aligned}$$

ここで、 $n=3$ のとき、B が連勝せず 2 試合に勝つことはない。

②に $n=3$ を代入すると 0 であるから、②は $n=3$ のときにも成り立つ。

$$\begin{array}{ccccccc} A & A & \cdots & A & B & A & \cdots & A & B & A & \cdots & A \\ p & p & & p & \uparrow & q & & p & \uparrow & q & & p \\ & & & & 1-p & & & & 1-p & & & \end{array}$$

[1], [2] から求める確率は

$$\begin{aligned} b_n &= (n-2)(1-p)^2 p^{n-3} q + \frac{(n-2)(n-3)(1-p)^2 p^{n-4} q^2}{2} \\ &= \frac{(n-2)(2p+nq-3q)(1-p)^2 p^{n-4} q}{2} \end{aligned}$$

4 [1999 京都大]

解説

$BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ とする.

$\triangle ABC$ は鋭角三角形であるから $a^2+b^2>c^2$, $b^2+c^2>a^2$, $c^2+a^2>b^2$ が成り立つ.

$$\text{したがって } x^2 = \frac{1}{2}(c^2 + a^2 - b^2)$$

$$y^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$$

$$z^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$$

の3つの式の右辺はいずれも正であり, これらを満たす正の数 x , y , z が存在する.

ここで, 直交する3辺の長さが x , y , z である直方体を作

$$\text{ると } x^2 + y^2 = a^2$$

$$y^2 + z^2 = b^2$$

$$z^2 + x^2 = c^2$$

が成り立ち, 右の図のように直方体に内接する四面体は,
すべての面が $\triangle ABC$ と合同である.

したがって, 各面すべてが与えられた鋭角三角形と合同な四面体は存在する.

