

1 [2021 神戸大]

(解説)

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{(x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1)}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}$$

$$= \frac{2x}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}$$

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \quad x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ であるから, } f'(x) = 0$$

とすると $x = 0$

よって, $f(x)$ の増減表は右のようになる。

したがって, $f(x)$ は $x = 0$ のときに最小値をとり

$$f(0) = \int_{-1}^0 \frac{dt}{t^2 - t + 1} + \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + t + 1}$$

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	最小	$\nearrow$

の値を計算すればよい。

$$\text{ここで, } \int_{-1}^0 \frac{dt}{t^2 - t + 1} \text{ について, } t = -s \text{ とすると } dt = -ds$$

t と s の対応は右のようになるから

$$\int_{-1}^0 \frac{dt}{t^2 - t + 1} = \int_1^0 \frac{-ds}{s^2 + s + 1} = \int_0^1 \frac{ds}{s^2 + s + 1}$$

t	-1	$\rightarrow$	0
s	1	$\rightarrow$	0

$$\text{よって } f(0) = 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + t + 1} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\text{さらに, } t + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta \text{ とすると } dt = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

t	0	$\rightarrow$	1
θ	$\frac{\pi}{6}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

t と θ の対応は右のようになる。

$$\text{したがって } f(0) = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{3}{4}(\tan^2 \theta + 1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{4\sqrt{3}}{3} \left[\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi$$

2 [2021 北海道大]

解説

(1) $3^{4x} = X$, $3^{y^2} = Y$ とすると, (*) から $X^2 + 9Y^2 = 6XY$

すなわち $X^2 - 6XY + 9Y^2 = 0$

$$(X - 3Y)^2 = 0$$

よって $X = 3Y$

したがって $3^{4x} = 3 \cdot 3^{y^2}$ すなわち $3^{4x} = 3^{y^2+1}$

ゆえに $4x = y^2 + 1$ すなわち $y^2 = 4x - 1$ ①

(2) $y > 0$ より, $1 - \frac{x}{y} > 0$ の両辺に y を掛けて $y > x$

$x > 0$ より, 両辺を 2 乗して $y^2 > x^2$

① を代入して $4x - 1 > x^2$ すなわち $x^2 - 4x + 1 < 0$

これを解くと $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$

また $\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}} 4} + \frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}} 4} = \log_4 \left(1 + \frac{x}{y}\right) + \log_4 \left(1 - \frac{x}{y}\right) = \log_4 \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 - \frac{x}{y}\right)$

$$= \log_4 \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) = \log_4 \left(1 - \frac{x^2}{4x-1}\right)$$

$f(x) = 1 - \frac{x^2}{4x-1}$ とすると $f'(x) = -\frac{2x \cdot (4x-1) - x^2 \cdot 4}{(4x-1)^2} = -\frac{2x(2x-1)}{(4x-1)^2}$

$2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$ において

$f'(x) = 0$ とすると $x = \frac{1}{2}$

$2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

よって, $f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{3}{4}$

をとる。

$y = \log_4 x$ は単調に増加するから, $\log_4 f(x)$ は $f(x)$ が最大となるときの最大値をとる。

$x = \frac{1}{2}$ を ① に代入すると $y^2 = 1$

$y > 0$ であるから $y = 1$

したがって, $\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}} 4} + \frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}} 4}$ は $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$ で最大値 $\log_4 \frac{3}{4}$

x	$2 - \sqrt{3}$	...	$\frac{1}{2}$	...	$2 + \sqrt{3}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	極大 $\frac{3}{4}$	↘	

すなわち $\log_4 3 - 1$ をとる。

3 [1998 京都大]

(解説)

(1) 直角を挟む2辺を a, b , 斜辺を c とすると, 仮定

$$\text{から } a + b + c + 2r = 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$c = (a - r) + (b - r)$$

$$\text{よって } c = (2 - c - 2r) - 2r \text{ から } c = 1 - 2r \cdots \cdots \textcircled{2}$$

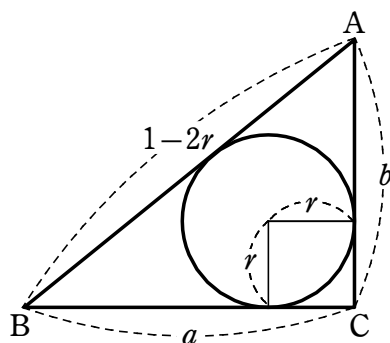
(2) ①に②を代入して $a + b = 1$

よって, 面積は

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a(1-a) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{8}$$

$$\text{ここで } a = b = \frac{1}{2} \left(\text{このとき } c = \frac{\sqrt{2}}{2}, r = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \right)$$

は題意を満たす直角三角形の2辺を与えるから, 最大値は $\frac{1}{8}$



4 [2021 大阪大]

(解説)

$$(1) \int_a^c (x^2 + bx) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 \right]_a^c = \frac{1}{3}(c^3 - a^3) + \frac{b}{2}(c^2 - a^2)$$

$$\text{同様にして } \int_b^c (x^2 + ax) dx = \frac{1}{3}(c^3 - b^3) + \frac{a}{2}(c^2 - b^2)$$

$$\text{よって, } (*) \text{ から } \frac{1}{3}(c^3 - a^3) + \frac{b}{2}(c^2 - a^2) = \frac{1}{3}(c^3 - b^3) + \frac{a}{2}(c^2 - b^2)$$

$$\text{すなわち } 2c^3 - 2a^3 + 3bc^2 - 3ba^2 = 2c^3 - 2b^3 + 3ac^2 - 3ab^2$$

$$\text{よって } 2(b^3 - a^3) + 3(b-a)c^2 + 3ab(b-a) = 0$$

$$a \neq b \text{ であるから } 2(b^2 + ba + a^2) + 3c^2 + 3ab = 0$$

$$\text{すなわち } -3c^2 = 2a^2 + 5ab + 2b^2$$

$$\text{よって } -3c^2 = (a + 2b)(2a + b) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで, 3は素数であるから, ①より $a + 2b, 2a + b$ のうち少なくとも一方は3の倍数である。

$$\text{ここで } (a + 2b) + (2a + b) = 3(a + b)$$

ゆえに, $(a + 2b) + (2a + b)$ は3の倍数である。

よって, $a + 2b, 2a + b$ はともに3の倍数である。

ゆえに, ①の右辺は9の倍数であるから, c^2 は3の倍数である。

したがって、 c は 3 の倍数である。

(2) 素因数分解すると $c = 3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

よって、 $c = 3600$ のとき、(*) および $a < b$ が満たされるならば、(1) と同様に考えることで、① から $-3(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2)^2 = (a + 2b)(2a + b)$

すなわち $(a + 2b)(2a + b) = -2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^4$ …… ② が成り立つ。

(1) より $a + 2b$, $2a + b$ はともに 3 の倍数であるから、 $a + 2b$, $2a + b$ は k , l を整数として $a + 2b = 3k$, $2a + b = 3l$

と表される。この連立方程式を解くと $a = 2l - k$, $b = 2k - l$

ゆえに、 a , b はともに整数である。

ここで、組 $(a + 2b, 2a + b)$ が異なるとき、異なる組 (a, b) が決まる。 …… [A]

よって、② を満たす組 $(a + 2b, 2a + b)$ の個数を求めればよい。

② の左辺は負であるから、 $a + 2b$, $2a + b$ は異符号であり、 $a < b$ のとき

$a + 2b > 2a + b$ である。

よって $a + 2b > 0 > 2a + b$

$a + 2b$ と $2a + b$ が 3 の倍数であることと、② から、正の整数 $a + 2b$ を素因数分解したときの素数 3 の個数が 1, 2, 3, 4 個の場合、 $2a + b$ を因数分解したとき、素数 3 の個数はそれぞれ 4, 3, 2, 1 個となる。

ゆえに、求める組 $(a + 2b, 2a + b)$ の個数は、 $(-2^8 \cdot 5^4$ の負の約数の個数) $\times 4$ である。

$-2^8 \cdot 5^4$ の負の約数の個数は $(8 + 1)(4 + 1) = 45$ (個)

したがって、求める個数は $45 \times 4 = 180$ (個)

注意 ② を満たす組 (a_1, b_1) , (a_2, b_2) に対して、 $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ とすると、

$a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ から $(a_1 + 2b_1, 2a_1 + b_1) = (a_2 + 2b_2, 2a_2 + b_2)$ が成り立つ。

この対偶を考えることで、[A] がわかる。