

1 [2024 神戸大]

解説

(1) 直線 ℓ_1 が放物線 C に接するための必要十分条件は、2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = -3x + 3 \text{ すなわち } ax^2 + (b+3)x + c - 3 = 0 \text{ の判別式を } D_1 \text{ とすると}$$

$$D_1 = 0$$

$$\text{ここで } D_1 = (b+3)^2 - 4a(c-3)$$

$$\text{ゆえに } (b+3)^2 - 4a(c-3) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

同様に、直線 ℓ_2 が放物線 C に接するための必要十分条件は、2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = x + 3 \text{ すなわち } ax^2 + (b-1)x + c - 3 = 0 \text{ の判別式を } D_2 \text{ とすると}$$

$$D_2 = 0$$

$$\text{ここで } D_2 = (b-1)^2 - 4a(c-3)$$

$$\text{ゆえに } (b-1)^2 - 4a(c-3) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } (b+3)^2 - (b-1)^2 = 0$$

$$\text{これを解いて } b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ に } \textcircled{3} \text{ を代入して整理すると } c = \frac{1}{a} + 3$$

$$(2) (1) \text{ より、放物線 } C \text{ は } y = ax^2 - x + \left(\frac{1}{a} + 3\right)$$

放物線 C が x 軸と異なる 2 点で交わるための必要十分条件は、2 次方程式

$$ax^2 - x + \left(\frac{1}{a} + 3\right) = 0 \text{ の判別式を } D_3 \text{ とすると } D_3 > 0$$

$$\text{ここで } D_3 = (-1)^2 - 4a\left(\frac{1}{a} + 3\right) = -12a - 3$$

$$\text{ゆえに } -12a - 3 > 0 \quad \dots\dots (*)$$

$$\text{すなわち } a < -\frac{1}{4}$$

$$\text{よって、求める } \frac{1}{a} \text{ の値の範囲は } -4 < \frac{1}{a} < 0$$

別解 $((*)$ までは同じ)

$$(*) \text{ の両辺に } -\frac{1}{3a^2} [< 0] \text{ を掛けて}$$

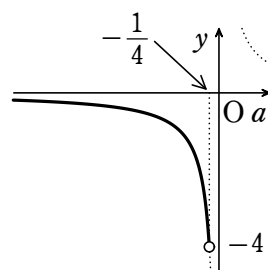
$$\text{整理すると } \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} + 4\right) < 0$$

$$\text{よって、求める } \frac{1}{a} \text{ の値の範囲は } -4 < \frac{1}{a} < 0$$

(3) $\triangle PQR$ の重心 G の座標を (x, y) とする。直線 ℓ_1 と放物線 C の接点 P の x 座標は

$$ax^2 - x + \left(\frac{1}{a} + 3\right) = -3x + 3 \text{ すなわち } ax^2 + 2x + \frac{1}{a} = 0 \text{ を解いて } x = -\frac{1}{a}$$

$$\text{よって、接点 } P \text{ の座標は } \left(-\frac{1}{a}, \frac{3}{a} + 3\right)$$



直線 ℓ_2 と放物線 C の接点 Q の x 座標は

$$ax^2 - x + \left(\frac{1}{a} + 3\right) = x + 3 \text{ すなわち } ax^2 - 2x + \frac{1}{a} = 0 \text{ を解いて } x = \frac{1}{a}$$

よって、接点 Q の座標は $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a} + 3\right)$

$y = ax^2 - x + \left(\frac{1}{a} + 3\right) = a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 + \frac{3}{4a} + 3$ より、放物線 C の頂点 R の座標は

$$\left(\frac{1}{2a}, \frac{3}{4a} + 3\right)$$

よって
$$x = \frac{-\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{2a}}{3}$$

$$y = \frac{\left(\frac{3}{a} + 3\right) + \left(\frac{1}{a} + 3\right) + \left(\frac{3}{4a} + 3\right)}{3}$$

すなわち
$$x = \frac{1}{6a} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$y = \frac{19}{12a} + 3 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

④ から
$$\frac{1}{a} = 6x$$

⑤ に代入して
$$y = \frac{19}{2}x + 3$$

また、 $-4 < \frac{1}{a} < 0$ であるから
$$-\frac{2}{3} < x < 0$$

したがって、求める軌跡は

$$\text{直線 } y = \frac{19}{2}x + 3 \text{ の } -\frac{2}{3} < x < 0 \text{ の部分}$$

2 [2024 神戸大]

解説

- (1) サイコロの出た目が必ず n の約数となるための条件は、 n が 1, 2, 3, 4, 5, 6 の公倍数となることである。

$$4 = 2^2, 6 = 2 \cdot 3 \text{ であるから、1 から 6 までの整数の最小公倍数は } 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

よって、 n は 60 の倍数であり、このような n で最小のものは $n = 60$

- (2) 「1 個のサイコロを投げて出た目が n の約数となる確率が $\frac{5}{6}$ 」…… ① とする。

n が ① を満たすとき、1 から 6 までの 6 つの整数のうち、1 つだけ n の約数でないものが存在する。

1 はすべての自然数の約数である。

また、 $2 \times 3 = 6$ より、2, 3, 6 のうち 2 つのみが約数になることはない。

ゆえに、 n は 4 または 5 のうちの一方を約数にもたない。

n が 4 を約数にもたないとき、 n は 1, 2, 3, 5, 6 の公倍数だが、4 の倍数でない。

すなわち、 n は 30 の倍数だが 60 の倍数でない。…… ②

n が 5 を約数にもたないとき、 n は 1, 2, 3, 4, 6 の公倍数だが、5 の倍数ではない。
すなわち、 n は 12 の倍数だが 60 の倍数でない。…… ③

②, ③ のうち一方のみを満たすような n で最小のものは 12

よって、求める自然数 n は $n = 12$

(3) サイコロを 3 回投げるとき、目の出方は全部で

6^3 通り

サイコロを 3 回投げて出た目の積が 20 の約数となる場合は、次の 6 つの場合がある。

[1] 出た目の積が 1 のとき

出た目は 1 が 3 回出るときで 1 通り

[2] 出た目の積が 2 のとき

出た目は 1 が 2 回, 2 が 1 回出るときで ${}_3C_1 = 3$ (通り)

[3] 出た目の積が 4 のとき

出た目は「1 が 2 回, 4 が 1 回出る」または「1 が 1 回, 2 が 2 回出る」ときで

${}_3C_1 \times 2 = 6$ (通り)

[4] 出た目の積が 5 のとき

出た目は 1 が 2 回, 5 が 1 回出るときで ${}_3C_1 = 3$ (通り)

[5] 出た目の積が 10 のとき

出た目は 1 が 1 回, 2 が 1 回, 5 が 1 回出るときで $3! = 6$ (通り)

[6] 出た目の積が 20 のとき

出た目は「2 が 2 回, 5 が 1 回出る」または「1 が 1 回, 4 が 1 回, 5 が 1 回出る」とき
で ${}_3C_1 + 3! = 9$ (通り)

[1] ~ [6] より、求める確率は

$$\frac{1+3+6+3+6+9}{6^3} = \frac{28}{216} = \frac{7}{54}$$

(1) 曲線 C と直線 ℓ の共有点の x 座標は、方程式 $|x^2 - 1| = 2a(x + 1)$ の実数解である。

[1] $x^2 - 1 \geq 0$ すなわち $x \leq -1, 1 \leq x$ のとき

$$x^2 - 1 = 2a(x + 1) \text{ から } (x + 1)(x - 2a - 1) = 0$$

$$\text{よって } x = -1, 2a + 1$$

[2] $x^2 - 1 < 0$ すなわち $-1 < x < 1$ のとき

$$-x^2 + 1 = 2a(x + 1) \text{ から } (x + 1)(x + 2a - 1) = 0$$

$$-1 < x < 1 \text{ から } x = -2a + 1$$

ゆえに、曲線 C と直線 ℓ の共有点の x 座標は $-1, -2a + 1, 2a + 1$

$$x = -1 \text{ のとき } y = 0$$

$$x = -2a + 1 \text{ のとき } y = -4a^2 + 4a$$

$$x = 2a + 1 \text{ のとき } y = 4a^2 + 4a$$

したがって、曲線 C と直線 ℓ の共有点の座標は

$$(-1, 0), (-2a + 1, -4a^2 + 4a), (2a + 1, 4a^2 + 4a)$$

(2) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しいとき、次の等式が成り立つ。

いとき、次の等式が成り立つ。

$$\int_{-1}^{2a+1} \{2a(x+1) - (x^2 - 1)\} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \{-x^2 + 1 - (x^2 - 1)\} dx$$

ここで

$$\int_{-1}^{2a+1} \{2a(x+1) - (x^2 - 1)\} dx$$

$$= - \int_{-1}^{2a+1} (x+1)(x-2a-1) dx$$

$$= - \left(-\frac{1}{6} \right) \{(2a+1) - (-1)\}^3 = \frac{4}{3}(a+1)^3$$

$$\int_{-1}^1 \{-x^2 + 1 - (x^2 - 1)\} dx = -2 \int_{-1}^1 (x+1)(x-1) dx = -2 \left(-\frac{1}{6} \right) \{1 - (-1)\}^3 = \frac{8}{3}$$

$$\text{よって } \frac{4}{3}(a+1)^3 = \frac{8}{3} \quad \text{すなわち} \quad (a+1)^3 = 2$$

$$\text{ゆえに } a+1 = \sqrt[3]{2}$$

$$\text{したがって } a = \sqrt[3]{2} - 1$$

これは $0 < a < 1$ を満たす

