

1

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式・不等式を解け。

(1) $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

【解答】 (1) $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi$ (2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi \leq \theta < 2\pi$

【解説】

(1) $2\theta + \frac{\pi}{3} = t$ とおくと $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ …… ①

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから

$$\frac{\pi}{3} \leq 2\theta + \frac{\pi}{3} < 4\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{すなわち} \quad \frac{\pi}{3} \leq t < \frac{13}{3}\pi$$

この範囲で、①を満たす t の値は

$$t = \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{10}{3}\pi, \frac{11}{3}\pi$$

よって $2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{10}{3}\pi, \frac{11}{3}\pi$

ゆえに $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi$

(2) $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3} = t$ とおくと $\cos t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ …… ①

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから

$$-\frac{\pi}{3} \leq \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3} < \pi - \frac{\pi}{3} \quad \text{すなわち} \quad -\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{2}{3}\pi$$

この範囲で、①を満たす t の値の範囲は

$$-\frac{\pi}{3} \leq t \leq -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \leq t < \frac{2}{3}\pi$$

よって $-\frac{\pi}{3} \leq \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \leq \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi$

すなわち $0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{12}, \frac{7}{12}\pi \leq \frac{\theta}{2} < \pi$

したがって $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi \leq \theta < 2\pi$

2

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式・不等式を解け。

(1) $2\cos^2\theta - \sin\theta - 1 = 0$

(2) $2\sin^2\theta + 5\cos\theta < 4$

【解答】 (1) $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$ (2) $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{5}{3}\pi$

【解説】

(1) 方程式を変形して $2(1 - \sin^2\theta) - \sin\theta - 1 = 0$

整理すると $2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$

因数分解して $(\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

よって $\sin\theta = -1, \frac{1}{2}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから

[1] $\sin\theta = -1$ のとき $\theta = \frac{3}{2}\pi$ [2] $\sin\theta = \frac{1}{2}$ のとき $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

したがって $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$

(2) 不等式を変形して $2(1 - \cos^2\theta) + 5\cos\theta < 4$

整理すると $2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2 > 0$

因数分解して $(\cos\theta - 2)(2\cos\theta - 1) > 0$

$-1 \leq \cos\theta \leq 1$ であるから常に $\cos\theta - 2 < 0$

よって $2\cos\theta - 1 < 0$ ゆえに $\cos\theta < \frac{1}{2}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{5}{3}\pi$

3

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\beta = \frac{1}{3}$ $\left(\frac{\pi}{2} < \beta < \pi\right)$ のとき、 $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, $\tan(\alpha - \beta)$ の値を求めよ。

【解答】 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{-2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{-2\sqrt{6} + 1}{6}$,

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{8\sqrt{2} + 9\sqrt{3}}{23}$$

【解説】

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるから $\cos\alpha > 0$

$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ であるから $\cos\beta < 0$

よって $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos\beta = -\sqrt{1 - \sin^2\beta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ゆえに $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{-2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{-2\sqrt{6} + 1}{6}$$

また $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$$

よって $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = -\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6} \div \frac{-2\sqrt{6} + 1}{6}$

$$= \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{6} - 1} = \frac{(2\sqrt{2} + \sqrt{3})(2\sqrt{6} + 1)}{(2\sqrt{6} - 1)(2\sqrt{6} + 1)} = \frac{8\sqrt{2} + 9\sqrt{3}}{23}$$

【別解】 $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

よって $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

$$= \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \right\} \div \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \right\}$$
$$= \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{6} - 1} = \frac{(2\sqrt{2} + \sqrt{3})(2\sqrt{6} + 1)}{(2\sqrt{6} - 1)(2\sqrt{6} + 1)}$$
$$= \frac{8\sqrt{2} + 9\sqrt{3}}{23}$$

1 0≦θ<2π のとき，次の方程式・不等式を解け。 (1) sin(2θ+π3)=-√32 (2) cos(θ2-π3)≧1√2	2 0≦θ<2π のとき，次の方程式・不等式を解け。 (1) 2cos²θ-sinθ-1=0 (2) 2sin²θ+5cosθ<4	3 sinα=12 (0<α<π2), sinβ=13 (π2<β<π) のとき，sin(α+β), cos(α-β), tan(α-β) の値を求めよ。
--	---	---