

1 [1999 京都大]

座標平面上で原点を通る直線と $y = x|x+2|$ のグラフが相異なる3点で交わっている。このグラフとこの直線によって囲まれる図形で、この直線より下側にあるものの面積を S_1 、上側にあるものの面積を S_2 とする。 $S_1 : S_2 = 9 : 8$ となるとき、この直線の傾きを求めよ。

2 [2019 鹿児島大]

関数 $f(x) = \log(1+x)$ ($x \geq 0$) を考える。 xy 平面上の $y = f(x)$ のグラフを y 軸の周りに1回転させてできる形の容器がある。はじめ空である容器に、時刻 t における水の量が vt になるように、単位時間あたり v の一定の割合で水を静かに注ぐ。ただし、 v は正の定数とし、容器は回転軸 (y 軸) が水平面に垂直で、 y 軸の正の側を上向きにして固定されている。

- (1) xy 平面上で $y = f(x)$ の増減と凹凸を調べてグラフをかけ。
- (2) 水面の高さが h になったときの、容器内の水の量 V を h を用いて表せ。
- (3) 水面の高さが $h = \log 2$ になったときの、水面の高さの変化率 $\frac{dh}{dt}$ を求めよ。

3 [2019 大阪大]

実数 s, t が $s^2 + t^2 \leq 6$ を満たしながら変わるとき、 xy 平面上で点 $(s+t, st)$ が動く領域を A とする。

- (1) $(2, \sqrt{2})$ が領域 A の点かどうか判定せよ。
- (2) A を図示せよ。
- (3) A を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

4 [2019 神戸大]

2つの科目 X と Y の試験を受けた 3 人の生徒の得点と、それぞれの科目の得点の平均値と標準偏差を以下の通りとする。

	生徒 1	生徒 2	生徒 3	平均値	標準偏差
科目 X	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}$	s_x
科目 Y	y_1	y_2	y_3	$\bar{y}$	s_y

ただし、 $s_x \neq 0$ かつ $s_y \neq 0$ とする。科目 X と科目 Y の得点の相関係数 r は

$$r = \frac{\sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^3 (y_i - \bar{y})^2}} \quad \text{で与えられる。}$$

座標空間内に 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(x_1, x_2, x_3)$, $B(y_1, y_2, y_3)$ をとる。O を通り、方向ベクトルが $(1, 1, 1)$ の直線を ℓ とする。 ℓ 上の点 P を $\overrightarrow{PA}$ と ℓ が垂直になるようにとり、 ℓ 上の点 Q を $\overrightarrow{QB}$ と ℓ が垂直になるようにとる。

(1) 点 P, 点 Q の座標と内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB}$ を $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_x , s_y , r を用いて表せ。

(2) $a = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_y}$ とおくとき、 $\cos \angle BPA$ を a と r を用いて表せ。

(3) 点 A と直線 ℓ を含む平面を α とする。平面 α 上の点 C を $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PQ}$ となるようにとる。点 B は α 上にないとし、 α 上の点 K を $\overrightarrow{KB}$ と α が垂直になるようにとる。

科目 X と科目 Y の得点の相関係数 r が $0 < r < \frac{s_x}{s_y}$ を満たすとき、点 K は線分 QC 上にあることを示せ。