

1

- (1) 不等式 $a^2 + ab + b^2 \geq a - b - 1$ を証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。
- (2) $a > 0, b > 0$ のとき、 $(2a + 3b)\left(\frac{8}{a} + \frac{3}{b}\right)$ の最小値を求めよ。

2

円 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ と円 $C_2: (x-5)^2 + y^2 = 1$ の共通接線の方程式を求めよ。

3

放物線 $C: y = x^2 - x$ と直線 $\ell: y = m(x-1) - 1$ は異なる2点 A, B で交わっている。

- (1) 定数 m の値の範囲を求めよ。
- (2) m の値が変化するとき、線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

4

座標平面上で不等式 $x^2 + y^2 \leq 2, x + y \geq 0$ で表される領域を A とする。点 (x, y) が A を動くとき、 $4x + 3y$ の最大値と最小値を求めよ。

5

座標平面上の点 (p, q) は $x^2 + y^2 \leq 8, x \geq 0, y \geq 0$ で表される領域を動く。

点 $(p+q, pq)$ の動く範囲を図示せよ。

6

整式 $P(x)$ を $(x-3)^2$ で割った余りが $2x-5$ であり、 $x-1$ で割った余りが5であるとき、 $P(x)$ を $(x-1)(x-3)^2$ で割った余りを求めよ。

7

3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 10 = 0$ の1つの解が $x = 2 + i$ であるとき、実数の定数 a, b

の値と、他の解を求めよ。

8

3次方程式 $x^3 - 3x + 5 = 0$ の3つの解を α, β, γ とするとき、 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, (\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1), \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ の値をそれぞれ求めよ。

9

x の方程式 $(i+1)x^2 + (k+i)x + ki + 1 = 0$ が実数解をもつとき、実数 k の値を求めよ。ただし、 $i^2 = -1$ とする。

10

2次方程式 $x^2 - (k+6)x + 6 = 0$ の解がすべて整数となるような定数 k の値とそのときの整数解をすべて求めよ。

11

$\triangle ABC$ において、 $AB=7, BC=5, CA=6$ のとき、外接円の半径 R 、内接円の半径 r を、それぞれ求めよ。

12

方程式 $19x - 24y = 1$ の整数解をすべて求めよ。

13

$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ を満たす正の整数の組 (x, y) をすべて求めよ。

14

2次方程式 $x^2 - 2mx + m + 6 = 0$ が異なる2つの正の実数解をもつように、定数 m の値の範囲を定めよ。

1

- 解答 (1) 証明略, $a=1$, $b=-1$
 (2) $a=2b$ のとき最小値 49

2

- 解答 $3x \pm 4y = 10$, $x \pm 2\sqrt{6}y = 10$

3

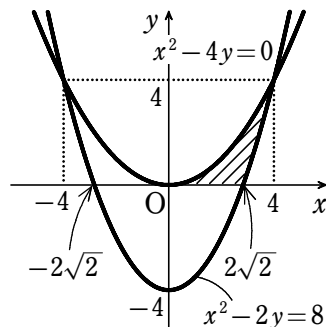
- 解答 (1) $m < -1$, $3 < m$
 (2) 放物線 $y = 2x^2 - 3x$ の $x < 0$, $2 < x$ の部分

4

- 解答 $x = \frac{4\sqrt{2}}{5}$, $y = \frac{3\sqrt{2}}{5}$ のとき最大値 $5\sqrt{2}$; $x = -1$, $y = 1$ のとき最小値 -1

5

- 解答 [図] 境界線を含む



6

- 解答 $2x^2 - 10x + 13$

7

- 解答 $a = -2$, $b = -3$; 他の解 $x = -2$, $2 - i$

8

- 解答 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 6$, $(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1) = -3$, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -15$

9

- 解答 $k = -2$

10

- 解答 $k = -13$ のとき $x = -6, -1$; $k = -11$ のとき $x = -3, -2$;
 $k = -1$ のとき $x = 2, 3$; $k = 1$ のとき $x = 1, 6$

11

- 解答 $R = \frac{35\sqrt{6}}{24}$, $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

12

- 解答 $x = 24k - 5$, $y = 19k - 4$ (k は整数)

13

- 解答 $(x, y) = (9, 36), (10, 20), (12, 12), (16, 8), (24, 6), (40, 5)$

14

- 解答 $m > 3$

1

解説

$$\begin{aligned} & a^2 + ab + b^2 - (a - b - 1) \\ &= a^2 + (b - 1)a + b^2 + b + 1 \\ &= \left(a + \frac{b - 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{b - 1}{2}\right)^2 + b^2 + b + 1 \\ &= \left(a + \frac{b - 1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(b + 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

ゆえに $a^2 + ab + b^2 \geq a - b - 1$

等号が成り立つのは $a + \frac{b - 1}{2} = 0$ かつ $b + 1 = 0$

すなわち $a = 1$, $b = -1$ のときである。

(2) $(2a + 3b)\left(\frac{8}{a} + \frac{3}{b}\right) = 25 + \frac{24b}{a} + \frac{6a}{b}$

$a > 0, b > 0$ より, $\frac{24b}{a} > 0, \frac{6a}{b} > 0$ であるから,

(相加平均) $\geq$ (相乗平均) により

$$\frac{24b}{a} + \frac{6a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{24b}{a} \cdot \frac{6a}{b}} = 24$$

よって $25 + \frac{24b}{a} + \frac{6a}{b} \geq 25 + 24 = 49$

等号が成り立つのは, $\frac{24b}{a} = \frac{6a}{b}$ のときである。

このとき $a^2 = 4b^2$ $a > 0, b > 0$ であるから $a = 2b$

したがって $a = 2b$ のとき最小値 49

2

解説

円 C_1 上の接点の座標を (x_1, y_1) とすると

$$x_1^2 + y_1^2 = 4 \quad \dots\dots ①$$

接線の方程式は $x_1x + y_1y = 4 \quad \dots\dots ②$

直線 ② が円 C_2 に接するための条件は, 円 C_2 の中心

$(5, 0)$ と直線 ② の距離が, 円 C_2 の半径 1 に等しいこと

であるから $\frac{|5x_1 - 4|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = 1$

① を代入して整理すると $|5x_1 - 4| = 2$

よって $5x_1 - 4 = \pm 2$ したがって $x_1 = \frac{6}{5}, \frac{2}{5}$

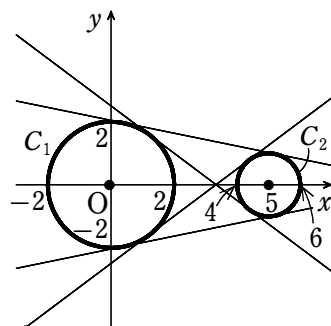
$x_1 = \frac{6}{5}$ のとき, ① から $y_1^2 = \frac{64}{25}$ ゆえに $y_1 = \pm \frac{8}{5}$

$x_1 = \frac{2}{5}$ のとき, ① から $y_1^2 = \frac{96}{25}$ よって $y_1 = \pm \frac{4\sqrt{6}}{5}$

ゆえに, ② から, 求める接線の方程式は

$$\frac{6}{5}x \pm \frac{8}{5}y = 4, \frac{2}{5}x \pm \frac{4\sqrt{6}}{5}y = 4 \quad \text{すなわち} \quad 3x \pm 4y = 10, x \pm 2\sqrt{6}y = 10$$

別解 共通接線の方程式を $y = mx + n$ とすると, これが円 C_1, C_2 に接する条件は,



それぞれ $\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2, \frac{|5m + n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$

したがって $|n| = 2\sqrt{m^2 + 1}, |5m + n| = \sqrt{m^2 + 1} \quad \dots\dots [A]$

よって $|n| = 2|5m + n|$ ゆえに $n = -10m$ または $3n = -10m$

このようにして, 一方の文字を消去し, 連立方程式 [A] を解く。

3

解説

(1) $y = x^2 - x$ と $y = m(x-1) - 1$ から

$$x^2 - x = m(x-1) - 1$$

整理すると $x^2 - (m+1)x + m+1 = 0 \quad \dots\dots ①$

放物線 C と直線 ℓ は異なる 2 点で交わっているから, ① の判別式を D とすると

$$D = \{-(m+1)\}^2 - 4(m+1) = (m+1)(m-3) > 0$$

よって $m < -1, 3 < m$

(2) 2 点 A, B の x 座標は, 2 次方程式 ① の異なる 2 つの実数解 α, β である。

線分 AB の中点を $P(x, y)$ とすると, 解と係数の関係から

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{m+1}{2} \quad \dots\dots ②$$

また, P は直線 ℓ 上の点であるから

$$y = m\left(\frac{m+1}{2} - 1\right) - 1 = \frac{m^2 - m - 2}{2} \quad \dots\dots ③$$

② から $m = 2x - 1 \quad \dots\dots ④$

③ に代入して整理すると

$$y = 2x^2 - 3x$$

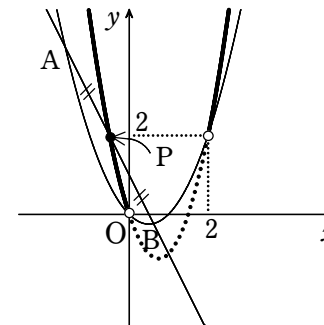
また, (1) の結果と ④ から

$$2x - 1 < -1, 3 < 2x - 1$$

ゆえに $x < 0, 2 < x$

よって, 求める軌跡は

放物線 $y = 2x^2 - 3x$ の $x < 0, 2 < x$ の部分



4

解説

$x^2 + y^2 = 2$ …… ①, $x + y = 0$ …… ② とする。

①, ② を連立して解くと

$$(x, y) = (-1, 1), (1, -1)$$

連立不等式の表す領域 A は、図の斜線部分である。

ただし、境界線を含む。

$$4x + 3y = k \text{ …… ③ とおくと } y = -\frac{4}{3}x + \frac{k}{3}$$

これは傾き $-\frac{4}{3}$, y 切片 $\frac{k}{3}$ の直線を表す。

図から、直線 ③ が円 ① と第 1 象限で接するとき、 k の値は最大になる。

$$\text{①, ③ を連立して } x^2 + \left(\frac{k-4x}{3}\right)^2 = 2$$

$$\text{整理すると } 25x^2 - 8kx + k^2 - 18 = 0 \text{ …… ④}$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると、直線 ③ が円 ① に接するための条件は

$$\frac{D}{4} = (-4k)^2 - 25(k^2 - 18) = -9(k^2 - 50) = 0 \quad \text{これを解いて } k = \pm 5\sqrt{2}$$

第 1 象限では $x > 0$, $y > 0$ であるから、③ より $k > 0$ で $k = 5\sqrt{2}$

$$\text{④ の重解は } x = -\frac{-8 \cdot 5\sqrt{2}}{2 \cdot 25} = \frac{4\sqrt{2}}{5} \quad \text{③ から } y = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{2} - 4 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{5}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

次に、直線 ② の傾きは -1 , 直線 ③ の傾きは $-\frac{4}{3}$ で、 $-\frac{4}{3} < -1$ であるから、図よ

り、 k の値が最小となるのは、直線 ③ が点 $(-1, 1)$ を通るときである。

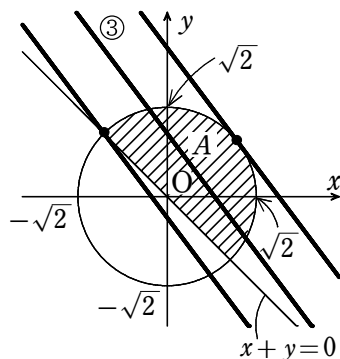
$$\text{このとき、} k \text{ の値は } 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = -1$$

$$\text{よって } x = \frac{4\sqrt{2}}{5}, y = \frac{3\sqrt{2}}{5} \text{ のとき最大値 } 5\sqrt{2}; x = -1, y = 1 \text{ のとき最小値 } -1$$

5

解説

$$\text{条件から } p^2 + q^2 \leq 8 \text{ …… ①, } p \geq 0, q \geq 0 \text{ …… ②}$$



$$X = p + q, Y = pq \text{ とおく。}$$

$$\text{① から } (p + q)^2 - 2pq \leq 8$$

$$\text{よって } X^2 - 2Y \leq 8 \text{ …… ③}$$

また、 p, q は 2 次方程式 $t^2 - Xt + Y = 0$ …… ④ の解であり、しかも ② より、0 以上の実数解をもつ。

④ の判別式を D とすると、④ が実数解をもつための条件は

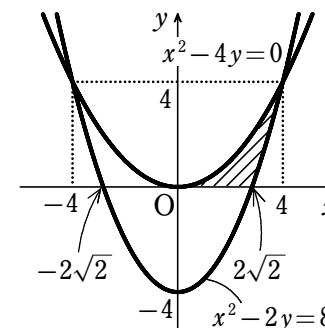
$$D \geq 0 \text{ すなわち } X^2 - 4Y \geq 0 \text{ …… ⑤}$$

また、④ の 2 つの解がともに 0 以上になるための条件は

$$X \geq 0 \text{ かつ } Y \geq 0$$

したがって、③ かつ ⑤ かつ「 $X \geq 0$ かつ $Y \geq 0$ 」の表す領域を、変数 X, Y を x, y におき換えて xy 平面上に図示すると、図の斜線部分。

ただし、境界線を含む。



6

解説

$P(x)$ を $(x-1)(x-3)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax^2 + bx + c$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$P(x) = (x-1)(x-3)^2 Q(x) + ax^2 + bx + c \text{ …… ①}$$

ここで、 $(x-1)(x-3)^2 Q(x)$ は $(x-3)^2$ で割り切れるから、 $P(x)$ を $(x-3)^2$ で割ったときの余りは、 $ax^2 + bx + c$ を $(x-3)^2$ で割ったときの余りと等しい。

$P(x)$ を $(x-3)^2$ で割ると $2x-5$ 余るから

$$ax^2 + bx + c = a(x-3)^2 + 2x - 5$$

よって、等式 ① は次のように表される。

$$P(x) = (x-1)(x-3)^2 Q(x) + a(x-3)^2 + 2x - 5$$

$$\text{したがって } P(1) = a(1-3)^2 + 2 \cdot 1 - 5 = 4a - 3$$

$$P(x) \text{ を } x-1 \text{ で割った余りは } 5 \text{ であるから } P(1) = 5$$

ゆえに $4a-3=5$ よって $a=2$

したがって、求める余りは

$$2(x-3)^2+2x-5 \quad \text{すなわち} \quad 2x^2-10x+13$$

7

解説

$2+i$ が解であるから $(2+i)^3+a(2+i)^2+b(2+i)+10=0$

整理すると $(3a+2b+12)+(4a+b+11)i=0$

a, b は実数であるから、 $3a+2b+12, 4a+b+11$ も実数で

$$3a+2b+12=0, 4a+b+11=0$$

これを解いて $a=-2, b=-3$

このとき、方程式は $x^3-2x^2-3x+10=0$

左辺を因数分解すると $(x+2)(x^2-4x+5)=0$

これを解いて $x=-2, 2\pm i$

したがって、他の解は $x=-2, 2-i$

別解 1. 実数係数の3次方程式が虚数解 $x=2+i$ をもつから、それと共役な複素数 $2-i$ もこの方程式の解になる。…… (*)

よって、 $x^3+ax^2+bx+10$ は

$$\begin{array}{r} x^3+ax^2+bx+10 \\ \left. \begin{array}{l} x^3-4x^2+5x \\ (a+4)x^2+(b-5)x+10 \\ (a+4)x^2-4(a+4)x+5(a+4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^3+ax^2+bx+10 \\ x^3-4x^2+5x \\ (a+4)x^2-4(a+4)x+5(a+4) \end{array} \\ \hline (4a+b+11)x-5a-10 \end{array}$$

すなわち x^2-4x+5 で割り切れる。

右の割り算において、(余り) $=0$ とすると

$$4a+b+11=0, -5a-10=0$$

これを解くと $a=-2, b=-3$

このとき、方程式は $(x^2-4x+5)(x+2)=0$

したがって、他の解は $x=2-i, -2$

参考 恒等式 $x^3+ax^2+bx+10=(x^2-4x+5)(x-c)$ を考えてもよい。

右辺を展開して整理し、両辺の係数を比較すると

$$a=-c-4, b=4c+5, 10=-5c \quad \text{よって} \quad a=-2, b=-3, c=-2$$

別解 2. [(*) までは同じ]

$x=2\pm i$ 以外の解を c とすると、3次方程式の解と係数の関係から

$$c+(2+i)+(2-i)=-a,$$

$$c(2+i)+c(2-i)+(2+i)(2-i)=b,$$

$$c(2+i)(2-i)=-10$$

これを解いて $a=-2, b=-3, c=-2$

ゆえに、他の解は $x=2-i, -2$

8

解説

3次方程式の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3, \alpha\beta\gamma=-5$$

ゆえに $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0^2-2\cdot(-3)=6$

等式 $x^3-3x+5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ が成り立ち、この等式の両辺に $x=1$ を代入すると

$$1^3-3\cdot 1+5=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$$

よって $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)=-3$

α, β, γ はそれぞれ $x^3-3x+5=0$ の解であるから

$$\alpha^3-3\alpha+5=0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^3=3\alpha-5 \quad \dots\dots ①$$

$$\beta^3-3\beta+5=0 \quad \text{ゆえに} \quad \beta^3=3\beta-5 \quad \dots\dots ②$$

$$\gamma^3-3\gamma+5=0 \quad \text{ゆえに} \quad \gamma^3=3\gamma-5 \quad \dots\dots ③$$

①, ②, ③ の辺々を加えて $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3(\alpha+\beta+\gamma)-15=-15$

別解 $[(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$ の値を求める際の別解]

$$\begin{aligned} (\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1) &= \alpha\beta\gamma - (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) + (\alpha+\beta+\gamma) - 1 \\ &= -5 - (-3) + 0 - 1 = -3 \end{aligned}$$

別解 $[\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ の値を求める際の別解]

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$$

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \alpha\beta\gamma=-5 \quad \text{より} \quad \alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\cdot(-5)=0$$

$$\text{すなわち} \quad \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-15$$

9

解説

方程式の実数解を $x=\alpha$ とすると

$$(i+1)\alpha^2+(k+i)\alpha+ki+1=0$$

i について整理すると $(\alpha^2 + k\alpha + 1) + (\alpha^2 + \alpha + k)i = 0$

$\alpha^2 + k\alpha + 1, \alpha^2 + \alpha + k$ は実数であるから

$$\alpha^2 + k\alpha + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad \alpha^2 + \alpha + k = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ から $(k-1)\alpha + 1 - k = 0$

よって $(k-1)(\alpha-1) = 0$ ゆえに $k=1$ または $\alpha=1$

[1] $k=1$ のとき, $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ はともに $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

判別式を D とすると $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$

よって, α は虚数解となるから, 条件に適さない。

[2] $\alpha=1$ のとき, $\textcircled{2}$ から $k=-2$ これは $\textcircled{1}$ も満たす。

したがって $k=-2$

別解 [$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を導くところまでは同じ]

$\textcircled{2}$ から $k = -\alpha^2 - \alpha \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}$ に代入して整理すると $\alpha^3 - 1 = 0$

ゆえに $(\alpha-1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$

α は実数であるから $\alpha^2 + \alpha + 1 = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

よって $\alpha - 1 = 0$ すなわち $\alpha = 1$

このとき, $\textcircled{3}$ から $k = -2$

10

解説

2つの整数解を α, β ($\alpha \leq \beta$) とする。

解と係数の関係から $\alpha + \beta = k + 6, \alpha\beta = 6$

α, β は整数であるから, k も整数である。

$\alpha\beta = 6$ から $(\alpha, \beta) = (-6, -1), (-3, -2), (2, 3), (1, 6)$

また, $k = \alpha + \beta - 6$ であるから $k = -13, -11, -1, 1$

よって $k = -13$ のとき $x = -6, -1$;

$k = -11$ のとき $x = -3, -2$;

$k = -1$ のとき $x = 2, 3$;

$k = 1$ のとき $x = 1, 6$

11

解説

余弦定理により $\cos A = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{5}{7}$

$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

正弦定理により $\frac{BC}{\sin A} = 2R$

$$\text{ゆえに} \quad R = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{7}{2\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24}$$

また, $\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} r(a+b+c)$$

$$\text{よって} \quad \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7} = \frac{1}{2} r(5+6+7)$$

$$\text{整理して} \quad 6\sqrt{6} = 9r$$

$$\text{ゆえに} \quad r = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

別解 (後半) ヘロンの公式を用いると, $2s = 5 + 6 + 7$ から $s = 9$

$$\text{よって} \quad S = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = 6\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{2} r(5+6+7) = 6\sqrt{6} \quad \text{から} \quad r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

12

解説

$x = -5, y = -4$ は方程式の整数解の1つである。

$$\text{よって} \quad 19(x+5) - 24(y+4) = 0$$

$$\text{すなわち} \quad 19(x+5) = 24(y+4) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

19 と 24 は互いに素であるから, $x+5$ は 24 の倍数である。

ゆえに, k を整数として, $x+5 = 24k$ と表される。

$$\textcircled{1} \text{ に代入して} \quad 19 \cdot 24k = 24(y+4) \quad \text{すなわち} \quad y+4 = 19k$$

よって、解は $x=24k-5, y=19k-4$ (k は整数)

注意 19 と 24 で互除法を用いて、1 組の解 $x=-5, y=-4$ を見つける方法

$$24=19 \cdot 1+5 \quad \text{移項して} \quad 24-19 \cdot 1=5$$

$$19=5 \cdot 3+4 \quad \text{移項して} \quad 19-5 \cdot 3=4$$

$$5=4 \cdot 1+1 \quad \text{移項して} \quad 5-4 \cdot 1=1$$

$$\text{よって} \quad 1=5-4 \cdot 1=5-(19-5 \cdot 3) \cdot 1=19 \cdot (-1)+5 \cdot 4=19 \cdot (-1)+(24-19 \cdot 1) \cdot 4$$

$$19 \cdot (-1)+(24-19 \cdot 1) \cdot 4 \text{ を整理して} \quad 1=19 \cdot (-5)-24 \cdot (-4)$$

13

解説

$$\text{両辺に } 4xy \text{ を掛けて} \quad 8y+4x=xy$$

$$\text{よって} \quad xy-4x-8y=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-8)(y-4)=32 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

x, y は正の整数であるから、 $x-8, y-4$ は整数である。

$$\text{また、} x \geq 1, y \geq 1 \text{ であるから} \quad x-8 \geq -7, y-4 \geq -3$$

$$\text{よって、} \textcircled{1} \text{ から} \quad (x-8, y-4)=(1, 32), (2, 16), (4, 8), (8, 4), (16, 2), (32, 1)$$

$$\text{したがって} \quad (x, y)=(9, 36), (10, 20), (12, 12), (16, 8), (24, 6), (40, 5)$$

14

解説

$$f(x)=x^2-2mx+m+6 \text{ とすると} \quad f(x)=(x-m)^2-m^2+m+6$$

2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの正の実数解をもつ

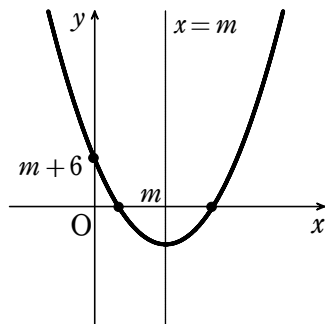
ための条件は、放物線 $y=f(x)$ が x 軸の正の部分と、異なる 2 点で交わることである。

これは、次の [1] ~ [3] が同時に成り立つことと同値である。

[1] $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-m)^2-(m+6)=m^2-m-6>0$$

$$\text{これを解いて} \quad m<-2, 3<m \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$



[2] 放物線 $y=f(x)$ の軸は直線 $x=m$ で、

$$\text{この軸について} \quad m>0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

[3] $f(0)>0$ から $m+6>0$

$$\text{よって} \quad m>-6 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③ の共通範囲を求めて $m>3$

