

第5講 例題

1

【解答】 (1) $\frac{3}{4}\pi$ (2) $a = -\frac{3}{2}$ (3) $a = 1$

【解説】

$$(1) \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\left(-\frac{2}{3} - i\right) - (-1)}{2i - (-1)} = \frac{\frac{1}{3} - i}{1 + 2i} = \frac{\left(\frac{1}{3} - i\right)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)}$$

$$= \frac{1}{5} \left(-\frac{5}{3} - \frac{5}{3}i\right) = \frac{1}{3}(-1 - i)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \left\{ \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) \right\}$$

$$\text{したがって } \angle BAC = \left| -\frac{3}{4}\pi \right| = \frac{3}{4}\pi$$

$$(2) \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{(a - i) - (-1)}{2i - (-1)} = \frac{(a + 1 - i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{(a - 1) - (2a + 3)i}{5} \dots\dots ①$$

3点 A, B, C が一直線上にあるための条件は、①が実数となることであるから

$$2a + 3 = 0 \quad \text{よって} \quad a = -\frac{3}{2}$$

(3) 2直線 AB, AC が垂直であるための条件は、①が純虚数となることであるから $a - 1 = 0$ かつ $2a + 3 \neq 0$ よって $a = 1$

2

【解答】 (1) $\angle A = \frac{\pi}{2}$, $\angle B = \frac{\pi}{3}$, $\angle C = \frac{\pi}{6}$ の直角三角形

(2) $\angle B = \frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形

【解説】

(1) $\sqrt{3}i$ は純虚数であるから、2直線 AB, AC は垂直に交わり $\angle A = \frac{\pi}{2}$

$$\text{また、} \left| \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right| = \sqrt{3} \text{ であるから}$$

$$|\gamma - \alpha| = \sqrt{3} |\beta - \alpha|$$

$$AC = \sqrt{3} AB \text{ であるから } AB : AC = 1 : \sqrt{3}$$

$$\text{よって、} \triangle ABC \text{ は } \angle A = \frac{\pi}{2}, \angle B = \frac{\pi}{3}, \angle C = \frac{\pi}{6}$$

の直角三角形である。

(2) 等式から $\gamma - \beta = -i(\alpha - \beta)$

$$\alpha \neq \beta \text{ であるから } \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} = -i$$

$$\text{これは純虚数であるから、2直線 BA, BC は垂直に交わり } \angle B = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{また、} \left| \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} \right| = 1 \text{ であるから } |\gamma - \beta| = |\alpha - \beta|$$

$$\text{ゆえに } BC = BA$$

よって、 $\triangle ABC$ は $\angle B = \frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形である。

3

【解答】 (1) 辺 AB を斜辺とする直角二等辺三角形

(2) 辺 OA を斜辺とする直角二等辺三角形

【解説】

$$(1) \alpha^2 + \beta^2 = 0 \text{ から } (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = 0$$

$$\text{よって } \alpha = \pm i\beta$$

$$\text{ゆえに } \alpha = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2} \right) \beta$$

$$\text{または } \alpha = \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i\sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} \beta$$

したがって、点 A は、点 B を点 O を中心として $\frac{\pi}{2}$

または $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

よって、三角形 OAB は辺 AB を斜辺とする直角二等辺三角形である。

(2) 点 B は点 O と異なるから $\beta \neq 0$

よって、 $\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 = 0$ の両辺を $\beta^2 (\neq 0)$ で割って

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 - 2 \cdot \frac{\alpha}{\beta} + 2 = 0$$

$$\text{これを } \frac{\alpha}{\beta} \text{ について解くと } \frac{\alpha}{\beta} = 1 \pm i$$

$$\text{ゆえに } \alpha = (1 + i)\beta$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4} \right) \beta$$

$$\text{または } \alpha = (1 - i)\beta$$

$$= \sqrt{2} \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i\sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right\} \beta$$

したがって、点 A は、点 B を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$

または $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転し、原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍に拡大した点である。

よって、三角形 OAB は辺 OA を斜辺とする直角二等辺三角形である。

4

【解答】 略

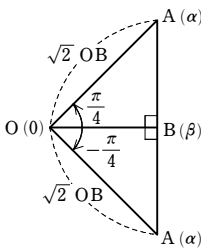
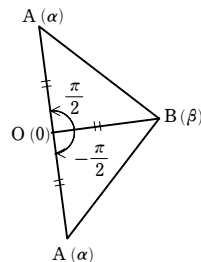
【解説】

$$\alpha = 4i, \beta = 5 - i, \gamma = 1 - i \text{ とすると}$$

$$\frac{\alpha - \beta}{0 - \beta} = \frac{4i - (5 - i)}{-(-5 + i)} = \frac{5(1 - i)}{5 - i} = \frac{5(1 - i)(5 + i)}{(5 - i)(5 + i)} = \frac{5(6 - 4i)}{26}$$

$$= \frac{5}{13}(3 - 2i)$$

$$\frac{\alpha - \gamma}{0 - \gamma} = \frac{4i - (1 - i)}{-(1 - i)} = \frac{1 - 5i}{1 - i} = \frac{(1 - 5i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{6 - 4i}{2}$$



$$= 3 - 2i$$

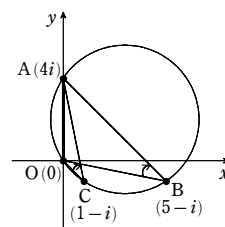
$$\text{よって } \arg \frac{\alpha - \beta}{0 - \beta} = \arg \frac{\alpha - \gamma}{0 - \gamma}$$

$$\text{ゆえに、} \angle 0\beta\alpha = \angle 0\gamma\alpha \text{ から}$$

$$\angle OBA = \angle OCA$$

β, γ の実部は正であるから、2点 B, C は直線 OA に関して同じ側にある。

したがって、4点 O, A, B, C は1つの円周上にある。



5

【解答】 略

【解説】

異なる3点 α, β, γ が一直線上にあるから、 $\beta - \alpha \neq 0$ であり、 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が実数である。

$$\text{よって } \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \overline{\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right)}$$

$$\text{すなわち } \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\overline{\gamma} - \overline{\alpha}}{\overline{\beta} - \overline{\alpha}}$$

$$\text{分母を払って } (\gamma - \alpha)(\overline{\beta} - \overline{\alpha}) = (\overline{\gamma} - \overline{\alpha})(\beta - \alpha)$$

$$\text{ゆえに } (\gamma - \alpha)\overline{\beta} - (\gamma - \alpha)\overline{\alpha} = \overline{\gamma}(\beta - \alpha) - \overline{\alpha}(\beta - \alpha)$$

$$\text{したがって } \overline{\alpha}(\beta - \gamma) + \overline{\beta}(\gamma - \alpha) + \overline{\gamma}(\alpha - \beta) = 0$$

6

【解答】 略

【解説】

O を複素数平面上の原点にとり、

$$A(\alpha), B(\beta), D(z_1), F(z_2), M(z)$$

とする。

点 D は、点 A を点 O の周りに $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点であるから

$$z_1 = \alpha \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i\sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} = -i\alpha$$

点 F は、点 B を点 O の周りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点であるから

$$z_2 = \beta \left(\cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2} \right) = i\beta$$

$$\text{また、点 M は、線分 DF の中点であるから } z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{-i\alpha + i\beta}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}i$$

$$\text{ここで } \frac{z - 0}{\beta - \alpha} = \frac{1}{2}i$$

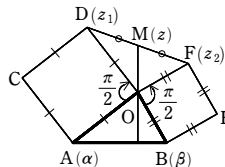
$$\text{よって、} \frac{z - 0}{\beta - \alpha} \text{ は純虚数となるから } AB \perp OM$$

7

【解答】 略

【解説】

$$AH \perp BC \iff \frac{\gamma - \beta}{z - \alpha} \text{ が純虚数}$$



$$\Leftrightarrow \frac{\gamma-\beta}{z-\alpha} + \overline{\left(\frac{\gamma-\beta}{z-\alpha}\right)} = 0 \text{ かつ } \frac{\gamma-\beta}{z-\alpha} \neq 0 \quad \dots\dots ①$$

が成り立つから、①を示す。

$z = \alpha + \beta + \gamma$ より、 $z - \alpha = \beta + \gamma$ であるから

$$\frac{\gamma-\beta}{z-\alpha} + \overline{\left(\frac{\gamma-\beta}{z-\alpha}\right)} = \frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\overline{\gamma-\beta}}{\overline{\beta+\gamma}} = \frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\overline{\gamma}-\overline{\beta}}{\overline{\beta}+\overline{\gamma}} \quad \dots\dots ②$$

ここで、点 A(α)、B(β)、C(γ)は単位円上にあるから

$$|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$$

すなわち $\alpha\overline{\alpha} = \beta\overline{\beta} = \gamma\overline{\gamma} = 1$

$$\text{よって } \overline{\beta} = \frac{1}{\beta}, \quad \overline{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$$

これを②に代入すると

$$\frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\overline{\gamma}-\overline{\beta}}{\overline{\beta}+\overline{\gamma}} = \frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}} = \frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\beta-\gamma}{\gamma+\beta} = 0$$

また、A、B、C、Hはすべて異なる点であるから

$$\frac{\gamma-\beta}{z-\alpha} \neq 0$$

よって、①が成り立つから $AH \perp BC$

同様に $BH \perp CA$

したがって、Hは $\triangle ABC$ の垂心である。

1

$$\text{【解答】 (1) } \frac{\pi}{4} \quad (2) \ a = -\frac{3}{2} \quad (3) \ a = 1$$

【解説】

(1) $a=1$ のとき、 $\gamma=1-2i$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta} &= \frac{(1-2i)-i}{(-1-i)-i} = \frac{1-3i}{-1-2i} = \frac{(1-3i)(-1+2i)}{(-1-2i)(-1+2i)} \\ &= \frac{5+5i}{5} = 1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

したがって、 $\angle ABC$ の大きさは $\frac{\pi}{4}$

$$(2) \ \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{(a-2i)-(-1-i)}{i-(-1-i)} = \frac{a+1-i}{1+2i} = \frac{(a-1)-(2a+3)i}{5} \quad \dots\dots ①$$

3点 A、B、Cが一直線上にあるための条件は、①が実数となることであるから

$$2a+3=0 \quad \text{よって} \quad a = -\frac{3}{2}$$

(3) 2直線 AB、ACが垂直であるための条件は、①が純虚数となることであるから

$$a-1=0 \text{ かつ } 2a+3 \neq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a=1$$

2

【解答】 (1) 正三角形 (2) $BA=BC$ の直角二等辺三角形

【解説】

$$(1) \text{ 等式から } \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\text{ゆえに } \left| \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} \right| = \frac{|\alpha-\beta|}{|\gamma-\beta|} = \frac{BA}{BC} = 1$$

よって $BA=BC$

$$\text{また、} \arg \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} = \frac{\pi}{3} \text{ であるから } \angle CBA = \frac{\pi}{3}$$

したがって、 $\triangle ABC$ は正三角形である。

$$(2) \text{ 等式から } \beta-\alpha = (\beta-\gamma)i$$

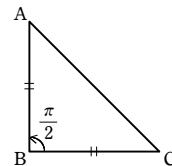
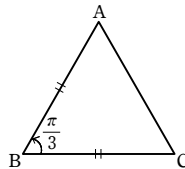
$$\text{よって } \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} = i$$

$$\text{ゆえに } \left| \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} \right| = \frac{|\alpha-\beta|}{|\gamma-\beta|} = \frac{BA}{BC} = 1$$

よって $BA=BC$

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} \text{ は純虚数であるから } BC \perp BA$$

したがって、 $\triangle ABC$ は $BA=BC$ の直角二等辺三角形である。



3

$$\text{【解答】 (1) } \angle O = \frac{\pi}{2}, \angle A = \frac{\pi}{3}, \angle B = \frac{\pi}{6} \text{ の直角三角形}$$

(2) $OA=AB$ の直角二等辺三角形

【解説】

(1) $\alpha \neq 0$ より $\alpha^2 \neq 0$ であるから、等式 $3\alpha^2 + \beta^2 = 0$ の両辺を α^2 で割ると

$$3 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + 3 = 0$$

$$\frac{\beta}{\alpha} \text{ について解くと } \frac{\beta}{\alpha} = \pm\sqrt{3}i = \sqrt{3} \cdot (\pm i)$$

$$= \sqrt{3} \left\{ \cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) \right\} \quad (\text{複号同順})$$

$$\text{ゆえに } \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| = \frac{|\beta|}{|\alpha|} = \frac{OB}{OA} = \sqrt{3}$$

よって $OA:OB=1:\sqrt{3}$

$$\text{また、} \frac{\beta}{\alpha} \text{ は純虚数であるから } \angle AOB = \frac{\pi}{2}$$

ゆえに、 $\triangle OAB$ は $\angle O = \frac{\pi}{2}$, $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $\angle B = \frac{\pi}{6}$ の直角三角形 である。

(2) $\alpha \neq 0$ より $\alpha^2 \neq 0$ であるから、等式 $2\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0$ の両辺を α^2 で割ると

$$2 - 2 \cdot \frac{\beta}{\alpha} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\beta}{\alpha} + 2 = 0$$

$$\frac{\beta}{\alpha} \text{ について解くと } \frac{\beta}{\alpha} = 1 \pm i = \sqrt{2} \left\{ \cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) \right\} \quad (\text{複号同順})$$

$$\text{ゆえに } \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| = \frac{|\beta|}{|\alpha|} = \frac{OB}{OA} = \sqrt{2}$$

よって $OA:OB=1:\sqrt{2}$

$$\text{また、} \arg \frac{\beta}{\alpha} = \pm\frac{\pi}{4} \text{ から } \angle AOB = \frac{\pi}{4}$$

ゆえに、 $\triangle OAB$ は $OA=AB$ の直角二等辺三角形 である。

4

【解答】 略

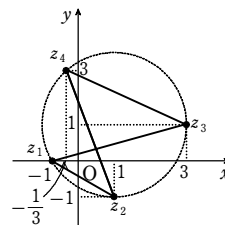
【解説】

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = \frac{4+i}{2-i} = \frac{7+6i}{5}$$

$$\frac{z_3-z_4}{z_2-z_4} = \frac{\frac{10}{3}-2i}{\frac{4}{3}-4i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5-3i}{1-3i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7+6i}{5}$$

$$\text{よって } \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \div \frac{z_3-z_4}{z_2-z_4} = 2$$

したがって、4点 z_1, z_2, z_3, z_4 は同一円周上にある。



5

【解答】 略

【解説】

C(γ)をA(α)に移す平行移動によって、D(δ)がD'(δ')に移るとすると

$$\delta' = \delta + (\alpha - \gamma)$$

$$\text{よって } \delta' - \alpha = \delta - \gamma$$

$$\text{ゆえに } \frac{\delta' - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha}$$

したがって

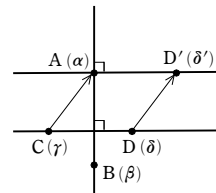
$$AB \perp CD \Leftrightarrow AB \perp AD'$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta' - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ が純虚数}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} \text{ が純虚数}$$

が成り立つ。

【参考】異なる4点A(α)、B(β)、C(γ)、D(δ)について、次のことも成り立つ。



$$AB \parallel CD \iff \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} \text{ が実数}$$

[6]

[解答] 略

[解説]

複素数平面上で、 $P(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ とする。

$$\begin{aligned} AB^2 + PC^2 &= |\beta - \alpha|^2 + |\gamma|^2 = (\beta - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) + |\gamma|^2 \\ &= |\beta|^2 - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + |\alpha|^2 + |\gamma|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC^2 + PB^2 &= |\gamma - \alpha|^2 + |\beta|^2 = (\gamma - \alpha)(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) + |\beta|^2 \\ &= |\gamma|^2 - \bar{\alpha}\gamma - \alpha\bar{\gamma} + |\alpha|^2 + |\beta|^2 \end{aligned}$$

よって、等式 $AB^2 + PC^2 = AC^2 + PB^2$ から

$$|\beta|^2 - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + |\alpha|^2 + |\gamma|^2 = |\gamma|^2 - \bar{\alpha}\gamma - \alpha\bar{\gamma} + |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

ゆえに $(\bar{\gamma} - \bar{\beta})\alpha = -(\gamma - \beta)\bar{\alpha}$

$$\alpha \neq 0, \bar{\alpha} \neq 0 \text{ であるから } \frac{\bar{\gamma} - \bar{\beta}}{\alpha} = -\frac{\gamma - \beta}{\alpha}$$

$$\text{すなわち } \overline{\left(\frac{\gamma - \beta}{\alpha}\right)} = -\frac{\gamma - \beta}{\alpha}$$

また、 B と C は異なる点であるから $\frac{\gamma - \beta}{\alpha} \neq 0$ よって、 $\frac{\gamma - \beta}{\alpha}$ は純虚数であるから $PA \perp BC$

[7]

[解答] 略

[解説]

 A , B から対辺に下ろした2つの垂線の交点を H とする。 $HA \perp BC$ であるから、 $\frac{\gamma - \beta}{\alpha}$ は純虚数である。

$$\text{すなわち } \overline{\left(\frac{\gamma - \beta}{\alpha}\right)} = -\frac{\gamma - \beta}{\alpha}$$

$$\text{よって } \alpha\bar{\gamma} - \alpha\bar{\beta} = \bar{\alpha}\beta - \bar{\alpha}\gamma \quad \dots\dots ①$$

 $HB \perp CA$ であるから、 $\frac{\alpha - \gamma}{\beta}$ は純虚数である。

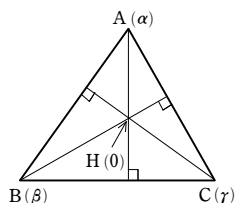
$$\text{すなわち } \overline{\left(\frac{\alpha - \gamma}{\beta}\right)} = -\frac{\alpha - \gamma}{\beta}$$

$$\text{よって } \beta\bar{\alpha} - \beta\bar{\gamma} = \bar{\beta}\gamma - \bar{\beta}\alpha \quad \dots\dots ②$$

$$①, ② \text{ の辺々を加えて整理すると } (\alpha - \beta)\bar{\gamma} = (\bar{\beta} - \bar{\alpha})\gamma$$

 $\gamma \neq 0, \bar{\gamma} \neq 0$ であるから

$$\frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{\gamma}} = -\frac{\beta - \alpha}{\gamma} \quad \text{すなわち} \quad \overline{\left(\frac{\beta - \alpha}{\gamma}\right)} = -\frac{\beta - \alpha}{\gamma}$$

また、 A と B は異なる点であるから $\frac{\beta - \alpha}{\gamma} \neq 0$ よって、 $\frac{\beta - \alpha}{\gamma}$ は純虚数となり、 $HC \perp AB$ となる。したがって、3つの垂線 AH , BH , CH は1点で交わる。

[1]

[解答] 略

[解説]

複素数平面上において、 M を原点とし、点 A , B , C を表す複素数をそれぞれ α , $-\beta$, β とおく。

このとき

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= |-\beta - \alpha|^2 + |\beta - \alpha|^2 = |\beta + \alpha|^2 + |\beta - \alpha|^2 \\ &= (\beta + \alpha)(\bar{\beta} + \bar{\alpha}) + (\beta - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) \\ &= (\beta + \alpha)(\bar{\beta} + \bar{\alpha}) + (\beta - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) \\ &= \beta\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha} - \alpha\bar{\beta} + \alpha\bar{\alpha} \\ &= 2(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta}) = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また } 2(AM^2 + BM^2) &= 2(|0 - \alpha|^2 + |0 - (-\beta)|^2) \\ &= 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2) \end{aligned}$$

$$\text{よって } AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

[2]

[解答] (1) 略 (2) 略

[解説]

$$(1) \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{2 + 2i - (5 - i)}{3 + i - (5 - i)} = \frac{-3 + 3i}{-2 + 2i} = \frac{3}{2}$$

よって、 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が実数であるから、3点 α , β , γ は一直線上にある。

$$\begin{aligned} (2) \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} &= \frac{-1 + 3i - (2 + i)}{4 + 4i - (2 + i)} = \frac{-3 + 2i}{2 + 3i} = \frac{(-3 + 2i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} \\ &= \frac{-6 + (9 + 4)i - 6i^2}{4 - 9i^2} = \frac{13i}{13} = i \end{aligned}$$

よって、 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が純虚数であるから、 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ したがって、直線 AB と直線 AC は垂直に交わる。

[3]

[解答] 略

[解説]

円周角の定理から $\angle ACB = \angle ADB$

$$\text{よって } \arg \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} = \arg \frac{\beta - \delta}{\alpha - \delta}$$

$$\text{すなわち } \arg \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} - \arg \frac{\beta - \delta}{\alpha - \delta} = 0$$

$$\text{ゆえに } \arg \left(\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \div \frac{\beta - \delta}{\alpha - \delta} \right) = 0$$

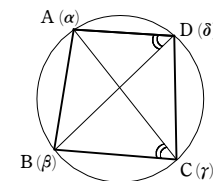
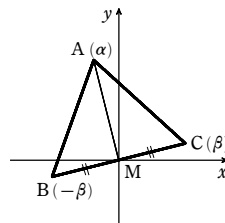
したがって、 $\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \div \frac{\beta - \delta}{\alpha - \delta}$ は実数である。

[4]

[解答] 略

[解説]

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta \text{ から } \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{\beta + \delta}{2}$$

よって、四角形 $ABCD$ の対角線 AC , BD の中点が一致する。ゆえに、四角形 $ABCD$ は平行四辺形である。また、 $\delta - \alpha = i(\beta - \alpha)$, $\alpha \neq \beta$ から

$$\frac{\delta - \alpha}{\beta - \alpha} = i \quad \dots\dots ①$$

これは純虚数であるから、2直線 AD , AB は垂直に交わる。

$$\text{よって } \angle BAD = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{また、① から } \left| \frac{\delta - \alpha}{\beta - \alpha} \right| = 1$$

ゆえに $|\delta - \alpha| = |\beta - \alpha|$ したがって $AD = AB$ 以上から、四角形 $ABCD$ は正方形である。

[5]

$$\text{[解答] (1) } \frac{\alpha}{\beta} = 1 + \sqrt{3}i$$

$$(2) \angle OBA = \frac{\pi}{2}, \angle AOB = \frac{\pi}{3}, \angle OAB = \frac{\pi}{6} \text{ の直角三角形}$$

$$(3) \sqrt{3} - \sqrt{3}i$$

[解説]

$$(1) \alpha^2 - 2\alpha\beta + 4\beta^2 = 0 \text{ の両辺を } \beta^2 (\neq 0) \text{ で割ると } \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\alpha}{\beta} + 4 = 0$$

$$\text{したがって } \frac{\alpha}{\beta} = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \cdot 4} = 1 \pm \sqrt{3}i$$

 $0 < \arg \frac{\alpha}{\beta} < \pi$ であるから、 $\frac{\alpha}{\beta}$ の虚部は正である。

$$\text{よって } \frac{\alpha}{\beta} = 1 + \sqrt{3}i$$

$$(2) (1) \text{ より } \alpha = (1 + \sqrt{3}i)\beta = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\beta$$

よって、点 A は、点 B を点 O を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し、点 O からの距離を2倍に拡大した点である。したがって、 $\triangle OAB$ は $\angle OBA = \frac{\pi}{2}$,

$$\angle AOB = \frac{\pi}{3}, \angle OAB = \frac{\pi}{6} \text{ の直角三角形である。}$$

(3) 点 C を表す複素数を γ とする。四角形 $OABC$ が平行四辺形となるとき $OC \parallel AB$, $OC = AB$

$$\text{よって } \gamma = \beta - \alpha = \beta - (1 + \sqrt{3}i)\beta = -\sqrt{3}i\beta = -\sqrt{3}i(1 + i) = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$$

[6]

$$\text{[解答] } \angle A = \frac{\pi}{3}, \angle B = \frac{\pi}{2}, \angle C = \frac{\pi}{6} \text{ の直角三角形}$$

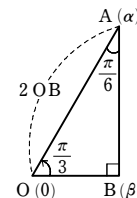
[解説]

$$\text{等式を変形すると } 3(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) + (\beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2) = 0$$

$$\text{すなわち } 3(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 = 0$$

$$\text{両辺を } (\alpha - \beta)^2 (\neq 0) \text{ で割ると } 3 + \left(\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \beta}\right)^2 = 0$$

$$\text{よって } \left(\frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta}\right)^2 = -3 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} = \pm \sqrt{3}i$$



第5講 レベルA

これは純虚数であるから、2 直線 BA, BC は垂直に交わり

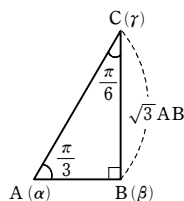
$$\angle B = \frac{\pi}{2}$$

また、 $\left| \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} \right| = \sqrt{3}$ であるから $|\gamma - \beta| = \sqrt{3} |\alpha - \beta|$

すなわち $BC = \sqrt{3} AB$

したがって、 $\triangle ABC$ は $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $\angle B = \frac{\pi}{2}$, $\angle C = \frac{\pi}{6}$

の直角三角形である。



第5講 レベルB

1

【解答】 (1) $-2, 1 \pm \sqrt{3}i$

(2) $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ とすると、 $A=30^\circ, B=60^\circ, C=90^\circ$ の直角三角形

【解説】

(1) 等式から $(\alpha - \beta)^3 = (-2)^3(\gamma - \beta)^3$ $\beta \neq \gamma$ から $\left(\frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} \right)^3 = (-2)^3$

ゆえに $\left(\frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} + 2 \right) \left(\left(\frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} \right)^2 - 2 \cdot \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} + 4 \right) = 0$

よって $\frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} = -2, 1 \pm \sqrt{3}i$

(2) 同一直線上にないことから $\frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} \neq -2$

ゆえに $\left| \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} \right| = 2, \arg \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} = \pm(60^\circ)$

よって、点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ を頂点とする三角形について $\frac{AB}{CB} = 2, B=60^\circ$ である

から、 $C=90^\circ$ となる。

したがって、 $A=30^\circ, B=60^\circ, C=90^\circ$ の直角三角形である。

2

【解答】 (1) $z_1 = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ (2) $z_2 = \frac{1}{2}[\cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta)]$

(3) $z_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}i$

【解説】

(1) $z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{4} \cdot 2(\cos \theta + i \sin \theta) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (\cos \theta + i \sin \theta)$
 $= \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right] (\cos \theta + i \sin \theta) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$

(2) $z_2 = -\frac{1}{2(\cos \theta + i \sin \theta)} = -\frac{1}{2}(\cos \theta - i \sin \theta) = \frac{1}{2}[\cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta)]$

(3) $OP_0 = 2, OP_1 = 1, \angle P_1OP_0 = \frac{\pi}{3}$ から

$$\angle P_0P_1O = \frac{\pi}{2}$$

よって、4 点 O, P_0, P_1, P_2 が同一円周上にあるのは、

$\angle OP_2P_0 = \frac{\pi}{2}$ すなわち $\frac{z_0 - z_2}{0 - z_2}$ が純虚数のとき。

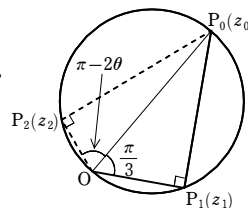
$$\frac{z_0 - z_2}{0 - z_2} = \left(z_0 + \frac{1}{z_0} \right) z_0 = z_0^2 + 1$$

$$= (4\cos 2\theta + 1) + i \cdot 4\sin 2\theta$$

ゆえに、 $4\cos 2\theta + 1 = 0$ から $4(2\cos^2 \theta - 1) + 1 = 0$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから $\cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{4}, \sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{4}$

したがって $z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{10}}{4}i\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}i$



$$\text{よって } \cos^2 \theta = \frac{3}{8}$$

章末問題A

1

【解答】 $a=1, b=4$

【解説】

3 点 $\alpha = a + 2i, \beta = 2 + bi, \gamma = b + 8ai$ が一直線上にあるから、
 $2 + bi = k(a + 2i), b + 8ai = l(a + 2i)$ となる実数 k, l が存在する。

ゆえに $ak=2 \dots\dots ①, 2k=b \dots\dots ②, al=b \dots\dots ③, 2l=8a \dots\dots ④$

①, ② から $ab=4 \dots\dots ⑤, \quad ③, ④$ から $b=4a^2 \dots\dots ⑥$

⑤, ⑥ から $4a^3=4 \quad a$ は実数であるから $a=1$

これを⑥に代入して $b=4$

2

【解答】 $|\alpha|=1$

【解説】

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \left(\bar{\alpha} + \frac{1}{\bar{\alpha}} \right) = \alpha \bar{\alpha} + \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \cdot \bar{\alpha} + \frac{1}{\alpha \bar{\alpha}} = |\alpha|^2 + \frac{1}{|\alpha|^2} + 2$$

よって $|\alpha|^2 + \frac{1}{|\alpha|^2} + 2 = 4$

すなわち $|\alpha|^2 + \frac{1}{|\alpha|^2} = 2$

$$|\alpha|^2 = t \text{ とおくと } t + \frac{1}{t} = 2$$

両辺に t を掛けると $t^2 + 1 = 2t$

よって $t^2 - 2t + 1 = 0$ すなわち $(t-1)^2 = 0$

ゆえに $t=1$ すなわち $|\alpha|^2 = 1$

$|\alpha| > 0$ であるから $|\alpha| = 1$

3

【解答】 証明略； $\beta = -\frac{1}{\alpha\bar{\alpha}}, a = \frac{1}{\alpha\bar{\alpha}} - (\alpha + \bar{\alpha}), b = \alpha\bar{\alpha} - \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha\bar{\alpha}}$

【解説】

3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0 \dots\dots ①$ が $x = \alpha$ を解にもつから

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + 1 = 0 \quad \text{よって} \quad \overline{\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + 1} = \bar{0}$$

ゆえに $\bar{\alpha}^3 + a\bar{\alpha}^2 + b\bar{\alpha} + 1 = 0$ すなわち $(\bar{\alpha})^3 + a(\bar{\alpha})^2 + b\bar{\alpha} + 1 = 0$

したがって、① は $x = \bar{\alpha}$ を解にもつ。

また、① の解は $\alpha, \bar{\alpha}, \beta$ であるから、解と係数の関係より

$$\alpha + \bar{\alpha} + \beta = -a \dots\dots ②, \alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}\beta + \beta\alpha = b \dots\dots ③, \alpha\bar{\alpha}\beta = -1 \dots\dots ④$$

$\alpha \neq 0$ であるから、④ より $\beta = -\frac{1}{\alpha\bar{\alpha}}$

② から $a = -\beta - (\alpha + \bar{\alpha}) = \frac{1}{\alpha\bar{\alpha}} - (\alpha + \bar{\alpha})$

③ から $b = \alpha\bar{\alpha} + \beta(\alpha + \bar{\alpha}) = \alpha\bar{\alpha} - \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha\bar{\alpha}}$

4

【解答】 略

【解説】

$\bar{\alpha}\beta$ が実数のとき $\overline{\bar{\alpha}\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$

すなわち $\alpha\bar{\beta} = \bar{\alpha}\beta$

章末問題A

$\alpha \neq 0, \overline{\alpha} \neq 0$ から、両辺を $\overline{\alpha}$ で割ると

$$\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{すなわち} \quad \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\beta}{\alpha}$$

よって、 $\frac{\beta}{\alpha}$ は実数であるから、 $\frac{\beta}{\alpha} = k$ すなわち $\beta = k\alpha$ となる実数 k がある。

逆に、 $\beta = k\alpha$ となる実数 k があるとき、 $\alpha \neq 0$ から $\frac{\beta}{\alpha} = k$

よって、 $\frac{\beta}{\alpha}$ は実数であるから

$$\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{すなわち} \quad \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}} = \frac{\beta}{\alpha}$$

両辺に $\alpha \overline{\alpha}$ を掛けると $\alpha \overline{\beta} = \overline{\alpha} \beta$

すなわち $\overline{\alpha} \beta = \overline{\alpha} \beta$

したがって、 $\overline{\alpha} \beta$ は実数である。

[5]

【解答】 (1) $i-1$ (2) 0 (3) 略

【解説】

$$(1) \quad \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$$

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$$

$$\text{よって} \quad r_3 = \alpha^3 + \beta^3 = (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^3 + (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)^3 = i - 1$$

$$(2) \quad \text{同様に} \quad \alpha^{12} = 1, \beta^{12} = 1$$

$$\alpha \neq 1, \beta \neq 1 \text{ であるから} \quad \alpha^{11} + \alpha^{10} + \cdots + \alpha + 1 = 0, \beta^{11} + \beta^{10} + \cdots + \beta + 1 = 0$$

$$\text{よって} \quad \sum_{n=1}^{12} r_n = \sum_{n=1}^{12} (\alpha^n + \beta^n) = \alpha \sum_{n=1}^{12} \alpha^{n-1} + \beta \sum_{n=1}^{12} \beta^{n-1} = 0$$

$$(3) \quad \overline{r_q} = \overline{\alpha^q + \beta^q} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^q + \left(\frac{1}{\beta}\right)^q = \frac{1}{\alpha^q} + \frac{1}{\beta^q} = \frac{\alpha^p}{\alpha^{12}} + \frac{\beta^p}{\beta^{12}} \\ = \alpha^p + \beta^p = r_p$$

よって、 r_p と r_q は共役な複素数である。

[6]

【解答】 (1) 0 (2) 0 (3) $\frac{n}{2}$

【解説】

$$(1) \quad \theta = \frac{360^\circ}{n}, \quad n \geq 3 \text{ であるから} \quad z \neq 1,$$

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1$$

$$\text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^n z^k = \frac{z(1-z^n)}{1-z} = 0$$

$$(2) \quad z^k = (\cos \theta + i \sin \theta)^k = \cos k\theta + i \sin k\theta$$

$$\text{よって、(1) から} \quad \sum_{k=1}^n z^k = \sum_{k=1}^n (\cos k\theta + i \sin k\theta) = \sum_{k=1}^n \cos k\theta + i \sum_{k=1}^n \sin k\theta = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^n \cos k\theta = 0$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n \cos^2 k\theta = \sum_{k=1}^n \frac{1 + \cos 2k\theta}{2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos 2k\theta$$

$$\text{ここで} \quad w = \cos 2\theta + i \sin 2\theta \text{ とおく. } 2\theta = \frac{720^\circ}{n}, \quad n \geq 3 \text{ であるから}$$

$$w \neq 1, \quad w^n = \cos 2n\theta + i \sin 2n\theta = \cos 720^\circ + i \sin 720^\circ = 1$$

$$\text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^n w^k = \frac{w(1-w^n)}{1-w} = 0$$

$$\text{よって、(2) と同様に} \quad \sum_{k=1}^n \cos 2k\theta = 0$$

$$\text{したがって} \quad \sum_{k=1}^n \cos^2 k\theta = \frac{n}{2}$$

[7]

【解答】 (1) -1 (2) $-\frac{1}{2}$

【解説】

(1) $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ は初項 z 、公比 z である等比数列の、初項から第 6 項までの和である。

$$z \neq 1 \text{ であるから} \quad z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = \frac{z(1-z^6)}{1-z} = \frac{z-z^7}{1-z}$$

$$\text{これと} z^7 = 1 \text{ から} \quad z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = \frac{z-1}{1-z} = -\frac{z-1}{z-1} = -1$$

【別解】 $z^7 = 1$ から $z^7 - 1 = 0$

$$\text{左辺を因数分解すると} \quad (z-1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

$$z \neq 1 \text{ であるから} \quad z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

$$\text{すなわち} \quad z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = -1$$

$$(2) \quad z^7 = 1 \text{ から} \quad |z|^7 = 1$$

$$\text{よって} \quad |z| = 1$$

$$z \text{ の偏角は } \theta \text{ であるから} \quad z = \cos \theta + i \sin \theta$$

したがって

$$\begin{aligned} z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 &= (\cos \theta + i \sin \theta) + (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ &\quad + (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) + (\cos 4\theta + i \sin 4\theta) \\ &\quad + (\cos 5\theta + i \sin 5\theta) + (\cos 6\theta + i \sin 6\theta) \end{aligned}$$

$$(1) \text{ より、} z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = -1 \text{ であるから、実部に着目すると}$$

$$\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、 $z^7 = 1$ より、 $7\theta = 2k\pi$ (k は整数) と表されるから

$$\cos 3\theta = \cos(7\theta - 4\theta) = \cos(2k\pi - 4\theta) = \cos(-4\theta) = \cos 4\theta$$

$$\text{同様に考えると} \quad \cos 5\theta = \cos 2\theta, \quad \cos 6\theta = \cos \theta$$

$$\text{ゆえに、}\textcircled{1} \text{ から} \quad 2\cos \theta + 2\cos 2\theta + 2\cos 4\theta = -1$$

$$\text{すなわち} \quad \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta = -\frac{1}{2}$$

【別解】 $z^7 = 1$ から $z^3 = z^{-4}, z^5 = z^{-2}, z^6 = z^{-1}$

したがって

$$z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = z + z^2 + z^{-4} + z^4 + z^{-2} + z^{-1}$$

$$= (\cos \theta + i \sin \theta) + (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

$$+ \{ \cos(-4\theta) + i \sin(-4\theta) \} + (\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$$

$$+ \{ \cos(-2\theta) + i \sin(-2\theta) \} + \{ \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \}$$

$$= 2\cos \theta + 2\cos 2\theta + 2\cos 4\theta$$

$$(1) \text{ より、} z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = -1 \text{ であるから}$$

$$\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta = -\frac{1}{2}$$

[8]

【解答】 (1) $z_5 = \alpha$ (2) 25 個 (3) -25

【解説】

$$(1) \quad \alpha = \cos \frac{360^\circ}{5} + i \sin \frac{360^\circ}{5} \text{ であるから} \quad \alpha^5 = 1$$

$$\text{よって} \quad z_2 = \alpha^3, z_3 = \alpha^9 = \alpha^4, z_4 = \alpha^{12} = \alpha^2$$

$$\text{ゆえに} \quad z_5 = \alpha^6 = \alpha$$

$$(2) \quad \alpha = \cos \frac{360^\circ}{5} + i \sin \frac{360^\circ}{5} \text{ であるから、} \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4 \text{ は互いに相異なる.}$$

$$(1) \text{ から、} z_1 \text{ の次に } \alpha \text{ となるのは } z_5$$

$$\text{同様の計算をして、} z_5 \text{ の次に } \alpha \text{ となるのは } z_{5+4} = z_9$$

$$\text{以下同様に考えて、} z_n = \alpha \text{ となる } n \text{ は } n = 4l - 3 \text{ (} l \text{ は自然数)}$$

$$1 \leq n \leq 100 \text{ から } 1 \leq l \leq 25 \quad \text{よって} \quad 25 \text{ 個}$$

$$(3) \quad (2) \text{ の考えから、} z_n \text{ は } \alpha, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^2 \text{ の値を繰り返しとる.}$$

$$\text{よって} \quad \sum_{n=1}^{100} z_n = \sum_{i=1}^{25} (\alpha + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^2) = 25(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4)$$

$$\text{ここで、} \alpha^5 = 1 \text{ より} \quad \alpha^5 - 1 = 0 \text{ であるから} \quad (\alpha - 1)(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

$$\alpha \neq 1 \text{ であるから} \quad \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

$$\text{すなわち} \quad \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = -1$$

$$\text{ゆえに} \quad \sum_{n=1}^{100} z_n = 25 \cdot (-1) = -25$$

[9]

$$\text{【解答】 (1) } 1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad 1+\sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$(2) \quad n = 2m \quad (3) \quad (m, n) = (12, 24), (24, 48)$$

【解説】

$$(1) \quad |1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad |1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\text{よって} \quad 1+i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$1+\sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$(2) \quad |(1+i)^n| = |1+i|^n = (\sqrt{2})^n = 2^{\frac{n}{2}}, \quad |(1+\sqrt{3}i)^m| = |1+\sqrt{3}i|^m = 2^m$$

$$|(1+i)^n| = |(1+\sqrt{3}i)^m| \text{ から } 2^{\frac{n}{2}} = 2^m \quad \text{よって} \quad n = 2m$$

$$(3) \quad (1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

$$(1+\sqrt{3}i)^m = 2^m \left(\cos \frac{m\pi}{3} + i \sin \frac{m\pi}{3} \right)$$

$$(1+i)^n = (1+\sqrt{3}i)^m \text{ から } |(1+i)^n| = |(1+\sqrt{3}i)^m|$$

$$\text{よって、(2) から} \quad n = 2m \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\arg(1+i)^n = \arg(1+\sqrt{3}i)^m \text{ から}$$

$$\frac{n\pi}{4} = \frac{m\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

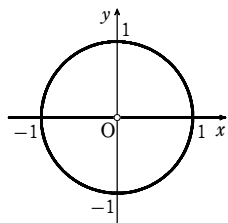
$$\text{すなわち} \quad 3n = 4m + 24k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

章末問題A

- ①, ② から $m=12k, n=24k$
 $m>0$ から $k=1, 2, 3, \dots$
 更に, $m+n=36k \leq 100$ から $k=1, 2$
 以上から $(m, n)=(12, 24), (24, 48)$

10

解答 図



解説

w が実数のとき $w = \overline{w}$
 よって $z + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{\overline{z}}$

ゆえに $z + \frac{1}{z} = \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}}$

すなわち $z^2 \overline{z} + z = z(\overline{z})^2 + z$
 よって $z \overline{z}(z - \overline{z}) - (z - \overline{z}) = 0$

ゆえに $(|z|^2 - 1)(z - \overline{z}) = 0$

すなわち $|z|^2 = 1$ または $z = \overline{z}$
 よって $|z| = 1$ または z は実数

$z \neq 0$ であるから, 求める図形は右の図のようになる。

別解 z は 0 でない複素数であるから, 実数 r を用いて
 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) (r > 0)$ と表せる。

このとき $w = z + \frac{1}{z} = z + z^{-1} = r(\cos \theta + i \sin \theta) + r^{-1}[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$
 $= r(\cos \theta + i \sin \theta) + r^{-1}(\cos \theta - i \sin \theta)$
 $= \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + \left(r - \frac{1}{r}\right) i \sin \theta$

w が実数となると $\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta = 0$

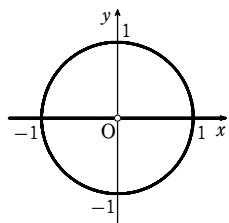
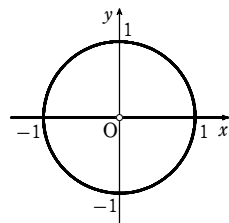
よって $r - \frac{1}{r} = 0$ または $\sin \theta = 0$

$r - \frac{1}{r} = 0$ より $r^2 = 1$ $r > 0$ より $r = 1$

$\sin \theta = 0$ より $\cos \theta = \pm 1$

よって $z = \cos \theta + i \sin \theta$ または $z = \pm 1 (r > 0)$

ゆえに, 求める図形は右の図のようになる。



11

解答 $k=1$

解説

点 1, α, β は時計回りに正三角形の頂点をなすとしてよい。

このとき $\alpha - 1 = (\beta - 1)(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$
 $= \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}(\beta - 1)$

よって $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\beta + \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \dots \dots ①$

また, 解と係数の関係から

$\alpha + \beta = -1 \dots \dots ②$ $\alpha\beta = k \dots \dots ③$

①, ② から $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}(-1 - \alpha) + \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

よって $\frac{3 + \sqrt{3}i}{2}\alpha = -\sqrt{3}i$

ゆえに $\alpha = -\frac{2i}{\sqrt{3} + i} = -\frac{(\sqrt{3} - i)i}{2} = -\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

② から $\beta = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

よって, ③ から $k = \alpha\beta = \frac{(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)}{4} = 1$

12

解答 $z_1 = 6 + 6i, z_2 = 2 + 2i$

解説

$P(z)$ とし, 原点 O と点 A $(3 + 3i)$ を考える。

$2|z - 3 - 3i| = |z|$ から $2AP = OP$

すなわち $OP : PA = 2 : 1$ であるから, 点 P の軌跡は
 アポロニウスの円で, P は線分 OA を 2 : 1 の比に内分,
 外分する点を直径の両端とする円周上にある。

線分 OA を 2 : 1 の比に内分する点を B とすると

点 B を表す複素数は $\frac{2(3 + 3i)}{2 + 1} = 2 + 2i$

線分 OA を 2 : 1 の比に外分する点を C とすると点 C を

表す複素数は $\frac{2(3 + 3i)}{2 - 1} = 6 + 6i$

$OB \leq |z| \leq OC$ であるから $z_1 = 6 + 6i, z_2 = 2 + 2i$

13

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1) $\triangle ABC$ が正三角形であるとき $\frac{AC}{AB} = \frac{BA}{BC}$ かつ $\angle BAC = \angle CBA = 60^\circ$

ゆえに $\left|\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right| = \left|\frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta}\right|$ かつ $\arg\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) = \arg\left(\frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta}\right)$

よって $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta}$ ゆえに $(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) = (\alpha - \beta)(\beta - \alpha)$

展開して整理すると $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0$

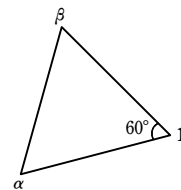
(2) (*) が成り立つとき $(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) = (\alpha - \beta)(\beta - \alpha) \dots \dots ①$

$\alpha = \beta$ のとき

$(\gamma - \alpha)^2 = 0$ ゆえに $\gamma = \alpha$ よって $\alpha = \beta = \gamma$

したがって, $A = B = C$ となる。

$\alpha \neq \beta$ のとき



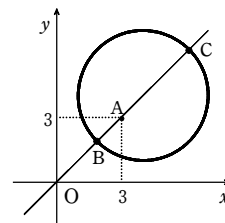
① より, $\beta \neq \gamma$ であるから $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta}$

よって $\left|\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right| = \left|\frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta}\right|$ かつ $\arg\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) = \arg\left(\frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta}\right)$

ゆえに $\frac{AC}{AB} = \frac{BA}{BC}$ かつ $\angle BAC = \angle CBA$ よって $\triangle ABC \sim \triangle BCA$

したがって $\angle A = \angle B = \angle C$ ゆえに, $\triangle ABC$ は正三角形である。

以上から, 題意は証明された。



章末問題B

1

【解答】 $\alpha=1$ のとき -1 以外の任意の数, $\alpha=-1$ のとき 1 以外の任意の数,
 $\alpha \neq \pm 1$ のとき $|z|=1$ $\left(z \neq -\frac{1}{\alpha}\right)$ を満たす数

【解説】

$\frac{\alpha+z}{1+\alpha z}$ が実数となるための条件は $\frac{\alpha+z}{1+\alpha z} = \overline{\left(\frac{\alpha+z}{1+\alpha z}\right)}$

よって $\frac{\alpha+z}{1+\alpha z} = \frac{\overline{\alpha}+\overline{z}}{1+\overline{\alpha}\overline{z}}$

ゆえに $(\alpha+z)(1+\overline{\alpha}\overline{z}) = (\overline{\alpha}+\overline{z})(1+\alpha z)$

展開して $\alpha + \overline{\alpha}\overline{z} + z + \overline{\alpha}z\overline{z} = \overline{\alpha} + \alpha\overline{\alpha}z + \overline{z} + \alpha z\overline{z}$

$|\alpha|=1$ から $|\alpha|^2=1$ よって $\alpha\overline{\alpha}=1$ …… ①

したがって $\alpha + \overline{z} + z + \overline{\alpha}|z|^2 = \overline{\alpha} + z + \overline{z} + \alpha|z|^2$

整理して $\alpha - \overline{\alpha} + |z|^2(\overline{\alpha} - \alpha) = 0$ ゆえに $(\alpha - \overline{\alpha})(1 - |z|^2) = 0$

① から $\overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ これを代入して $\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)(1 - |z|^2) = 0$

よって $\frac{1}{\alpha}(\alpha^2 - 1)(1 - |z|^2) = 0$

ゆえに $\alpha = \pm 1$ または $|z|=1$

$1 + \alpha z \neq 0$ であるから, 題意を満たす z は次のようになる。

$\alpha=1$ のとき -1 以外の任意の数

$\alpha=-1$ のとき 1 以外の任意の数

$\alpha \neq \pm 1$ のとき $|z|=1$ $\left(z \neq -\frac{1}{\alpha}\right)$ を満たす数

2

【解答】 $z = \pm 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

【解説】

$|z|=1$ から $z\overline{z}=1$ …… ① $\frac{z+1}{z^2} = \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2$ …… ②

① から $\frac{1}{z} = \overline{z}$ これを ② に代入して $\frac{z+1}{z^2} = \overline{z} + (\overline{z})^2$

よって, $\frac{z+1}{z^2}$ が実数であるための条件は

$\overline{\overline{z} + (\overline{z})^2} = \overline{z} + (\overline{z})^2$ すなわち $z + z^2 = \overline{z} + (\overline{z})^2$

整理すると $z - \overline{z} + z^2 - (\overline{z})^2 = 0$ ゆえに $(z - \overline{z})(1 + z + \overline{z}) = 0$

よって $z - \overline{z} = 0$ または $1 + z + \overline{z} = 0$

[1] $z - \overline{z} = 0$ のとき $\overline{z} = z$

ゆえに, z は実数であるから, $|z|=1$ より $z = \pm 1$

[2] $1 + z + \overline{z} = 0$ のとき $z + \overline{z} = -1$

また, ① から $z\overline{z}=1$

ゆえに, $z, \overline{z}$ は 2 次方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の解である。

この方程式を解くと $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

[1], [2] から $z = \pm 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

【別解】 ① から $\frac{1}{z} = z$ よって $\overline{\left(\frac{z+1}{z^2}\right)} = \frac{\overline{z}+1}{(\overline{z})^2} = \frac{1}{\overline{z}} + \left(\frac{1}{\overline{z}}\right)^2 = z + z^2$

よって, $\frac{z+1}{z^2}$ が実数であるための条件は $z + z^2 = \frac{z+1}{z^2}$

整理すると $z^4 + z^3 - z - 1 = 0$

左辺を因数分解して $(z+1)(z-1)(z^2+z+1) = 0$

これを解いて $z = \pm 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

3

【解答】 [略]

【解説】

$2|1+z|^2 - (1+|z|)^2 = 2(1+z)(1+\overline{z}) - (1+2|z|+|z|^2)$
 $= 2+2\overline{z}+2z+2|z|^2 - 1 - 2|z| - |z|^2$
 $= |z|^2 - 2|z| + 1 + 2z + 2\overline{z} = (|z|-1)^2 + 2(z+\overline{z})$

$z+\overline{z}$ は実数であり, また $x \geq 0$ であるから $z+\overline{z} \geq 0$

ゆえに $2|1+z|^2 - (1+|z|)^2 \geq 0$ よって $|1+z|^2 \geq \frac{(1+|z|)^2}{2}$

$|1+z| > 0, 1+|z| > 0$ であるから $|1+z| \geq \frac{1+|z|}{\sqrt{2}}$

等号は $|z|=1$ かつ $z+\overline{z}=0$ のとき成り立つ。

$z+\overline{z}=0$ から, z は純虚数または 0 である。

このうち $|z|=1$ を満たすものは $z = \pm i$ すなわち $z = \pm i$ のとき等号が成り立つ。

4

【解答】 $\sqrt{2} - 1 \leq r \leq \sqrt{2} + 1$

【解説】

$\alpha + \frac{1}{\alpha} = r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta$

よって, 点 $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ と実軸との距離は $\left|\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta\right|$

ゆえに, 求める条件は, $\left|\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta\right| \leq 2$ が任意の角 θ に対して成り立つことである。

$|\sin \theta| \leq 1$ であるから $\left|r - \frac{1}{r}\right| \leq 2$ 両辺を 2 乗して $r^2 - 2 + \frac{1}{r^2} \leq 4$

$r^2 > 0$ であるから $r^4 - 6r^2 + 1 \leq 0$ したがって $3 - 2\sqrt{2} \leq r^2 \leq 3 + 2\sqrt{2}$

$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1, \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$ で, $r > 0$ であるから

$\sqrt{2} - 1 \leq r \leq \sqrt{2} + 1$

5

【解答】 (1) -1 (2) 1 (3) 3 (4) -2

【解説】

(1) $\alpha^7 = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1$ であるから $\alpha^7 - 1 = 0$

$\alpha^7 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0$

$\alpha \neq 1$ であるから $\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = -1$

(2) (与式) $= \frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha-\alpha^7} = \frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha-1} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1$

(3) (与式) $= \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha^6}\right) + \left(\frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\alpha^5}\right) + \left(\frac{1}{1-\alpha^3} + \frac{1}{1-\alpha^4}\right)$

ここで, (2) と同様に $\frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\alpha^5} = \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} = 1,$

$\frac{1}{1-\alpha^3} + \frac{1}{1-\alpha^4} = \frac{1}{1-\alpha^3} + \frac{\alpha^3}{\alpha^3-1} = 1$

ゆえに (与式) $= 1 + 1 + 1 = 3$

(4) (与式) $= \left(-\alpha - 1 + \frac{1}{1-\alpha}\right) + \left(-\alpha^2 - 1 + \frac{1}{1-\alpha^2}\right) + \left(-\alpha^3 - 1 + \frac{1}{1-\alpha^3}\right)$
 $+ \left(-\alpha^4 - 1 + \frac{1}{1-\alpha^4}\right) + \left(-\alpha^5 - 1 + \frac{1}{1-\alpha^5}\right) + \left(-\alpha^6 - 1 + \frac{1}{1-\alpha^6}\right)$
 $= -6 - (\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6) + \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\alpha^3} + \frac{1}{1-\alpha^4}$
 $+ \frac{1}{1-\alpha^5} + \frac{1}{1-\alpha^6}$
 $= -6 - (-1) + 3 = -2$

6

【解答】 (1) $z = 2 \sin \theta \left\{ \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right\}$ (2) 1001 個

【解説】

(1) $z = 1 - (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 1 - \cos 2\theta - i \sin 2\theta$
 $= 2 \sin^2 \theta - 2i \sin \theta \cos \theta = 2 \sin \theta (\sin \theta - i \cos \theta)$

$0 < \theta < \pi$ であるから $\sin \theta > 0$

また $\sin \theta = \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), -\cos \theta = \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)$

よって $z = 2 \sin \theta \left\{ \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right\}$

(2) (1) から

$z^{2001} = (2 \sin \theta)^{2001} \left\{ \cos \left(2001 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) + i \sin \left(2001 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right\}$
 $= (2 \sin \theta)^{2001} \left\{ \cos \left(2001 \theta - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(2001 \theta - \frac{\pi}{2} \right) \right\}$

$(2 \sin \theta)^{2001} > 0$ であるから, 求める条件は $2001 \theta - \frac{\pi}{2} = 2n\pi$ (n は整数) …… ①

$0 < \theta < \pi$ であるから $-\frac{\pi}{2} < 2001 \theta - \frac{\pi}{2} < 1000 \times 2\pi + \frac{\pi}{2}$

① から $-\frac{1}{4} < n < 1000 + \frac{1}{4}$

これを満たす整数 n は $n = 0, 1, 2, \dots, 1000$

したがって, $2001 \theta - \frac{\pi}{2} = 2n\pi$ となる整数 n は 1001 個。

すなわち, 求める θ の値は全部で 1001 個。

7

【解答】 (1) $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = -1$

(2) $\alpha + \overline{\alpha} = -1, \alpha \overline{\alpha} = 2, \alpha = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$ (3) 7

【解説】

(1) ド・モアブルの定理から $z^7 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$

よって $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = \frac{z(1-z^6)}{1-z} = \frac{z-z^7}{1-z} = \frac{z-1}{1-z} = -1$

章末問題B

$$(2) \quad |z|=1 \text{ であるから, } |z|^2 = z \bar{z} \text{ より } \quad \bar{z} = \frac{1}{z}$$

ゆえに, $k=1, 2, \dots, 6$ に対し

$$\overline{z^k} = (\bar{z})^k = \frac{1}{z^k} = \frac{z^7}{z^k} = z^{7-k}$$

が成り立つ。

$$\text{よって} \quad \overline{\alpha} = \overline{z+z^2+z^4} = z^6+z^5+z^3$$

ゆえに

$$\alpha + \overline{\alpha} = (z+z^2+z^4) + (z^6+z^5+z^3) = z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6 = -1$$

$$\begin{aligned} \alpha \overline{\alpha} &= (z+z^2+z^4)(z^6+z^5+z^3) = z^7+z^8+z^{10}+z^6+z^7+z^9+z^4+z^5+z^7 \\ &= 1+z+z^3+z^6+1+z^2+z^4+z^5+1 = 3+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6 = 2 \end{aligned}$$

よって, 解と係数の関係から, $\alpha, \overline{\alpha}$ は 2 次方程式 $x^2+x+2=0$ の解である。

$$\text{これを解くと} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

ここで, $\sin \frac{8}{7}\pi = -\sin \frac{\pi}{7}$ であり

$$\sin \frac{2}{7}\pi > \sin \frac{\pi}{7}, \quad \sin \frac{4}{7}\pi > 0$$

であるから, ド・モアブルの定理より α の虚部は

$$\sin \frac{2}{7}\pi + \sin \frac{4}{7}\pi + \sin \frac{8}{7}\pi = \sin \frac{2}{7}\pi + \sin \frac{4}{7}\pi - \sin \frac{\pi}{7} > 0$$

$$\text{ゆえに} \quad \alpha = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$$

$$(3) \quad (2) \text{ の結果から } \quad \overline{\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}$$

$\beta = (1-z)(1-z^2)(1-z^4)$ とおくと

$$\overline{\beta} = (1-\bar{z})(1-\bar{z}^2)(1-\bar{z}^4) = (1-z^6)(1-z^5)(1-z^3)$$

$$\text{ゆえに} \quad (1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6) = \beta \overline{\beta}$$

ここで

$$\begin{aligned} \beta &= [1-(z+z^2+z^4) + (z^3+z^6+z^5) - z^7] = -\alpha + \overline{\alpha} = -\frac{-1+\sqrt{7}i}{2} + \frac{-1-\sqrt{7}i}{2} \\ &= -\sqrt{7}i \end{aligned}$$

であるから $\overline{\beta} = \sqrt{7}i$

$$\text{したがって, 求める値は} \quad \beta \overline{\beta} = (-\sqrt{7}i) \cdot \sqrt{7}i = 7$$

別解 z^k ($k=1, 2, \dots, 6$) は, 方程式

$$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=0$$

の解である。特に $k=1, 2, \dots, 6$ のとき $z^k \neq 1$ で, 各 z^k はすべて異なるから

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)$$

ここに $x=1$ を代入して

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)=1+1+1+1+1+1+1=7$$

[8]

$$\text{解答} \quad (1) \quad \alpha^2 = -4\sqrt{3} + 4i \quad (2) \quad \alpha = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5}{12}\pi + i \sin \frac{5}{12}\pi \right)$$

$$(3) \quad z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5}{36}\pi + i \sin \frac{5}{36}\pi \right), \quad \sqrt{2} \left(\cos \frac{29}{36}\pi + i \sin \frac{29}{36}\pi \right),$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{53}{36}\pi + i \sin \frac{53}{36}\pi \right)$$

(4) 9

解説

$$(1) \quad \alpha^2 = [(\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)i]^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)i - (\sqrt{3}+1)^2 \\ = -4\sqrt{3} + 4i$$

$$(2) \quad |\alpha|^2 = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8 \text{ であるから}$$

$$\alpha^2 = 8 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 8 \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$|\alpha|^2 = |\alpha^2| = 8 \text{ であるから } |\alpha| = 2\sqrt{2}$$

よって, α の偏角を θ とすると

$$\alpha = 2\sqrt{2}(\cos \theta + i \sin \theta)$$

ド・モアブルの定理から

$$\alpha^2 = 8(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より } 0 \leq 2\theta < 4\pi \text{ であるから, } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \quad 2\theta = \frac{5}{6}\pi, \quad \frac{5}{6}\pi + 2\pi$$

$$\text{ゆえに} \quad \theta = \frac{5}{12}\pi, \quad \frac{17}{12}\pi$$

$$\alpha \text{ の虚部は正であるから } \quad \theta = \frac{5}{12}\pi$$

$$\text{よって} \quad \alpha = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5}{12}\pi + i \sin \frac{5}{12}\pi \right)$$

(3) $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ ($0 \leq \phi < 2\pi$) とおくと, ド・モアブルの定理から

$$z^3 = r^3(\cos 3\phi + i \sin 3\phi)$$

$$z^3 = \alpha \text{ のとき } \quad r^3 = 2\sqrt{2}$$

$$r \text{ は正の実数であるから } \quad r = \sqrt{2}$$

また, $0 \leq \phi < 2\pi$ より $0 \leq 3\phi < 6\pi$ であるから, (1) より

$$3\phi = \frac{5}{12}\pi, \quad \frac{5}{12}\pi + 2\pi, \quad \frac{5}{12}\pi + 4\pi$$

$$\text{ゆえに} \quad \phi = \frac{5}{36}\pi, \quad \frac{29}{36}\pi, \quad \frac{53}{36}\pi$$

よって, 方程式 $z^3 = \alpha$ の解は

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5}{36}\pi + i \sin \frac{5}{36}\pi \right), \quad \sqrt{2} \left(\cos \frac{29}{36}\pi + i \sin \frac{29}{36}\pi \right),$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{53}{36}\pi + i \sin \frac{53}{36}\pi \right)$$

$$(4) \quad (2) \text{ とド・モアブルの定理により } \quad \alpha^n = (2\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{5n}{12}\pi + i \sin \frac{5n}{12}\pi \right)$$

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ であるから}$$

$$w_n = \sqrt{2}(2\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{5n+3}{12}\pi + i \sin \frac{5n+3}{12}\pi \right)$$

w_n が実数となると, $\frac{5n+3}{12}$ は整数であるから, 自然数 n は 3 の倍数でなければならない。

$$n=3, 6 \text{ のとき, } \frac{5n+3}{12} \text{ は自然数ではないので不適。}$$

$$n=9 \text{ のとき, } \frac{5n+3}{12} = 4 \text{ であるから条件を満たす。}$$

$$\text{したがって, 求める最小の自然数 } n \text{ は } \quad n=9$$

[9]

$$\text{解答} \quad (1) \quad z_2 = \frac{3+\sqrt{3}i}{2}, \quad z_3 = 1+\sqrt{3}i \quad (2) \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$(3) \quad z_n = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right)^{n-1} + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$(4) \quad n=6k+5 \quad (k \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

解説

$$(1) \quad z_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} z_1 + 1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z_3 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} z_2 + 1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{3}i}{2} + 1$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}i+3\sqrt{3}i-3}{4} + 1 = 1+\sqrt{3}i$$

$$(2) \quad z_{n+1} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} z_n + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}, \quad z_{n+1} - \alpha = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} (z_n - \alpha) \quad \dots\dots \textcircled{2} \text{ とする。}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から } \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \alpha + 1$$

$$\text{よって} \quad \alpha = \frac{2}{1-\sqrt{3}i} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$(3) \quad (2) \text{ から } \quad z_{n+1} - \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \left(z_n - \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad z_n - \frac{1+\sqrt{3}i}{2} &= \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right)^{n-1} \left(z_1 - \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right) \\ &= \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad z_n = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right)^{n-1} + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$(4) \quad -\frac{1-\sqrt{3}i}{2} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right)^{n-1} + \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \text{ とすると}$$

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right)^{n-1} = -1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{2} = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right), \quad \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \text{ であるから}$$

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right)^{n-1} = \cos \left\{ -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \times (n-1) \right\} + i \sin \left\{ -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \times (n-1) \right\}$$

$$\text{また} \quad -1 = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$\text{よって, } \textcircled{3} \text{ から } \quad -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \times (n-1) = \pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$$\text{すなわち} \quad n=6k+5$$

$$\text{したがって, 求める自然数 } n \text{ は } \quad n=6k+5 \quad (k \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

[10]

$$\text{解答} \quad c=1$$

解説

$$\text{解と係数の関係から } \quad \alpha + \beta = 2c - 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{また, 条件から } \frac{\alpha + \beta + c^2}{3} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } \quad c^2 + 2c - 3 = 0 \quad \text{よって} \quad c=1, -3$$

章末問題B

$c=1$ のとき $x^2+x+6=0$ となり、この方程式は虚数解 $x=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{2}$ をもつから通ずる。

$c=-3$ のとき $x^2+9x+14=0$ となり、解は実数 ($x=-2, -7$) であるから三角形ができず、不適。

以上から $c=1$

[11]

【解答】 (1) $z_n=4(1+i)^{n-1}-1$ (2) 略 (3) 2^{n+2}

【解説】

(1) 漸化式を変形すると $z_{n+1}+1=(1+i)(z_n+1)$

また $z_1+1=3+1=4$

よって、数列 $\{z_n+1\}$ は初項 4、公比 $1+i$ の等比数列である。

ゆえに $z_n+1=4\cdot(1+i)^{n-1}$

よって $z_n=4(1+i)^{n-1}-1$

(2) $z_{8m-7}=4(1+i)^{8m-8}-1=4\{(1+i)^8\}^{m-1}-1$

ここで $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$

$(1+i)^8=\{(1+i)^2\}^4=(2i)^4=2^4$

よって $z_{8m-7}=4\cdot(2^4)^{m-1}-1=2^{4m-2}-1$

(3) (1) から $|z_{n+1}-z_n|=|4(1+i)^n-4(1+i)^{n-1}|=4|(1+i)^{n-1}|=4(\sqrt{2})^{n-1}$

よって $|z_{n+2}-z_{n+1}|=4(\sqrt{2})^n$

ここで

$$\begin{aligned}\arg \frac{z_n-z_{n+1}}{z_{n+2}-z_{n+1}} &= \arg \frac{(1+i)^{n-1}-(1+i)^n}{(1+i)^{n+1}-(1+i)^n} = \arg \frac{1-(1+i)}{(1+i)^2-(1+i)} \\ &= \arg \frac{1-1-i}{2i-1-i} = \arg \frac{-i}{i-1} = \arg \frac{i}{1-i} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ\end{aligned}$$

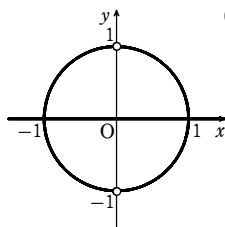
したがって、求める面積は

$$\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2} = \frac{1}{2} \times 4(\sqrt{2})^{n-1} \times 4(\sqrt{2})^n \sin 135^\circ = 8 \times 2^n \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{n+2}$$

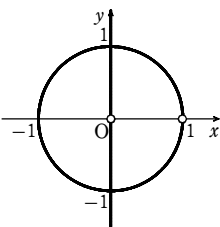
[12]

【解答】 (1) [図] 点 $i, -i$ を除く (2) [図] 点 0, 1 を除く

(1)



(2)



【解説】

(1) $z+i \neq 0$ かつ $z-i \neq 0$ から $z \neq \pm i$

$$\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} = \frac{2z}{z^2+1}$$

これが実数のとき、 $\frac{2z}{z^2+1} = \overline{\left(\frac{2z}{z^2+1}\right)}$ が成り立つ。

$$\text{よって } \frac{2z}{z^2+1} = \frac{2\bar{z}}{(\bar{z})^2+1}$$

すなわち $\bar{z}|z|^2+z-z|z|^2-\bar{z}=0$

ゆえに $(z-\bar{z})(|z|^2-1)=0$

よって $z=\bar{z}$ または $|z|=1$

したがって、 z は実数、または $|z|=1$

(ただし、 $z \neq \pm i$)

よって、求める図形は右図ようになる。ただし、点 $i, -i$ を除く。

(2) $w=\frac{z+i}{z-i}$ から $z=\frac{w+1}{w-1}i$ ($w \neq 1$)

[1] $z=\bar{z}$ のとき

$$\frac{w+1}{w-1}i = \overline{\left(\frac{w+1}{w-1}i\right)} \text{ から } \frac{w+1}{w-1}i = \frac{\bar{w}+1}{\bar{w}-1}(-i)$$

ゆえに $(w+1)(\bar{w}-1) + (\bar{w}+1)(w-1) = 0$

よって $|w|^2 - w + \bar{w} - 1 + |w|^2 - \bar{w} + w - 1 = 0$

すなわち $|w|=1$ ($w \neq 1$)

よって、点 w は点 O を中心とする半径 1 の円周上を動く。ただし、点 1 を除く。

[2] $|z|=1$ のとき

$z \neq \pm i$ から $w \neq 0$

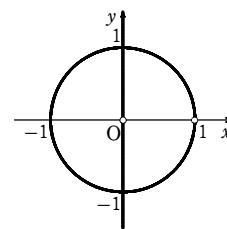
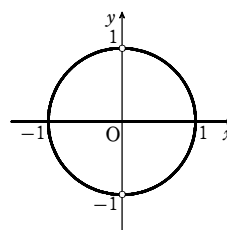
$$\left| \frac{w+1}{w-1}i \right| = 1 \text{ から } |w+1| = |w-1|$$

よって、点 w は 2 点 $-1, 1$ を結ぶ線分の垂直二等

分線、すなわち虚軸上を動く。ただし、点 O を除く。

[1], [2] から、求める図形は右図ようになる。

ただし、点 0, 1 を除く。



[13]

【解答】 略

【解説】

[1] $p \Rightarrow q$ の証明

複号はそれぞれ同順とする。

点 z_1, z_2, z_3 は点 z_1 を原点を中心として、それぞれ $\pm \frac{2}{3}\pi$, $\mp \frac{2}{3}\pi$ だけ回転したものと

であるから

$$\begin{aligned}z_1+z_2+z_3 &= z_1 + \left\{ \cos\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) \right\} z_1 + \left\{ \cos\left(\mp \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\mp \frac{2}{3}\pi\right) \right\} z_1 \\ &= z_1 + \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_1 + \left(-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_1 = 0\end{aligned}$$

[2] $q \Rightarrow p$ の証明

$z_1+z_2+z_3=0$ のとき、 $z_1+z_2=-z_3$ であるから $|z_1+z_2|=|-z_3|$

すなわち $|z_1+z_2|=|z_3|$

両辺を 2 乗すると $|z_1+z_2|^2=|z_3|^2$

$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$, $|z_3|=1$ であるから

$$(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=1 \quad \text{ゆえに} \quad z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2=1$$

$z_1\bar{z}_1=|z_1|^2=1$, $z_2\bar{z}_2=|z_2|^2=1$ であるから $1+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+1=1$

よって $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=-1$

$$\begin{aligned}\text{このとき } |z_1-z_2|^2 &= (z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2) = (z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) + |z_2|^2 \\ &= 1 - (-1) + 1 = 3\end{aligned}$$

すなわち $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$

同様に、 $|z_2-z_3|=\sqrt{3}$, $|z_3-z_1|=\sqrt{3}$ も示される。

以上から $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$

したがって、3 点 z_1, z_2, z_3 を頂点とする三角形は正三角形である。

[1], [2] から、条件 p と q は同値である。

[14]

【解答】 (1) 略 (2) $n=4$, $a=2^{\frac{1}{18}}$ または $a=2^{-\frac{1}{18}}$

【解説】

(1) $\arg z_{n+1} = \arg z_n + (2n+1)\arg w$ であるから

$$n \geq 2 \text{ のとき } \arg z_n = \arg z_1 + \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1) \right\} \arg w = n^2 \arg w = \frac{n^2}{36} \pi$$

これは、 $n=1$ のときも成り立つ。

よって、 z_n が実数 $\Leftrightarrow \frac{n^2}{36} \pi = k\pi$ (k は整数) $\Leftrightarrow n^2 = 36k$

ゆえに、 z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることである。

(2) $\arg \frac{z_{n+1}}{z_n} = (2n+1)\arg w = \frac{2n+1}{36} \pi$

$1 \leq n \leq 17$ であるから $\frac{\pi}{12} \leq \frac{2n+1}{36} \pi \leq \frac{35}{36} \pi$

$\triangle OP_n P_{n+1}$ が直角二等辺三角形であるから

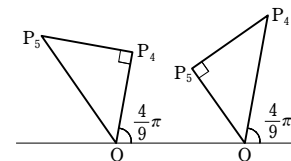
$$\frac{2n+1}{36} \pi = \frac{\pi}{4} \text{ または } \frac{\pi}{2}$$

n は正の整数であるから $n=4$

よって $\angle P_4 OP_5 = \frac{\pi}{4}$ であるから

$$|w|^9 = \sqrt{2} \text{ または } \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$|w|=a$ であるから $a=2^{\frac{1}{18}}$ または $a=2^{-\frac{1}{18}}$



章末問題C

1

【解答】 $a = -3, -1 + \sqrt{2}$

【解説】

虚軸上の複素数解は $x = yi$ (y は実数) とおける.

与式に代入すると

$$(yi)^4 - (yi)^3 + (yi)^2 - (a+2)yi - a - 3 = 0$$

ゆえに $y^4 - y^2 - a - 3 + \{y^3 - (a+2)y\}i = 0$

a, y は実数であるから

$$\begin{cases} y^4 - y^2 - a - 3 = 0 & \cdots \cdots ① \\ y^3 - (a+2)y = 0 & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

② から $y = 0$ または $y^2 = a + 2$

$y = 0$ のとき ① から $a = -3$

$y^2 = a + 2$ のとき ① から $(a+2)^2 - (a+2) - a - 3 = 0$

ゆえに $a^2 + 2a - 1 = 0$

$y^2 = a + 2 \geq 0$ であるから $a = -1 + \sqrt{2}$

以上から $a = -3, -1 + \sqrt{2}$

2

【解答】 (1) 略 (2) $(p, q, r) = (-3, 3, 0), (3, 3, 2), (3, 3, 0), (-3, 3, -2)$

【解説】

(1) α が $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解であるから

$$\begin{aligned} \alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha + r &= 0 \\ \overline{\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha + r} &= \overline{\alpha^3} + \overline{p\alpha^2} + \overline{q\alpha} + \overline{r} \\ &= \overline{\alpha^3} + \overline{p}\alpha^2 + \overline{q}\alpha + \overline{r} = 0 \end{aligned}$$

$\beta \neq \alpha$ であるから $\beta = \overline{\alpha}$ が成り立つ.

(2) 点 γ は実軸上にあり, 2 点 α, β は実軸に関して対称な位置にある. α の虚部を正, β の虚部を負とすると, 3 点 α, β, γ が 1 辺の長さ $\sqrt{3}$ の正三角形をなすから

$$(\alpha, \beta) = \left(\gamma + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \gamma + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \cdots \cdots ①$$

$$\text{または } (\alpha, \beta) = \left(\gamma - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \gamma - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \cdots \cdots ②$$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3$ から $\alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta) - 3 = 0 \cdots \cdots ③$

① を ③ に代入すると $\left(\gamma + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} + \gamma(2\gamma + 3) - 3 = 0$ ゆえに $\gamma = 0, -2$

$$p = -(\alpha + \beta + \gamma) = -(3\gamma + 3), \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \text{ から } q = 3,$$

$$r = -\alpha\beta\gamma = -(\gamma^2 + 3\gamma + 3)\gamma$$

よって $(p, q, r) = (-3, 3, 0), (3, 3, 2)$

② を ③ に代入すると $\left(\gamma - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} + \gamma(2\gamma - 3) - 3 = 0$ ゆえに $\gamma = 0, 2$

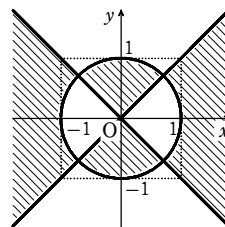
$$p = -(\alpha + \beta + \gamma) = -(3\gamma - 3), q = 3, r = -\alpha\beta\gamma = -(\gamma^2 - 3\gamma + 3)\gamma$$

よって $(p, q, r) = (3, 3, 0), (-3, 3, -2)$

以上から $(p, q, r) = (-3, 3, 0), (3, 3, 2), (3, 3, 0), (-3, 3, -2)$

3

【解答】 [図] 境界線上の点を含まない



【解説】

w の実部が正であるとき $w + \overline{w} > 0$

$$\begin{aligned} w + \overline{w} &= z^2 - \frac{1}{z^2} + (\overline{z})^2 - \frac{1}{(\overline{z})^2} = \frac{|z|^4 z^2 - (\overline{z})^2 + |z|^4 (\overline{z})^2 - z^2}{|z|^4} \\ &= \frac{|z|^4 \{z^2 + (\overline{z})^2\} - \{z^2 + (\overline{z})^2\}}{|z|^4} = \frac{\{z^2 + (\overline{z})^2\}(|z|^2 + 1)(|z|^2 - 1)}{|z|^4} \end{aligned}$$

$|z|^2 + 1 > 0$ であるから $\{z^2 + (\overline{z})^2\}(|z|^2 - 1) > 0, |z| \neq 0$
 $z = x + yi$ とすると $z^2 + (\overline{z})^2 = 2(x^2 - y^2)$ であるから

$$(x + y)(x - y)(x^2 + y^2 - 1) > 0$$

[1] $x^2 + y^2 - 1 > 0$ のとき $(x + y)(x - y) > 0$ から

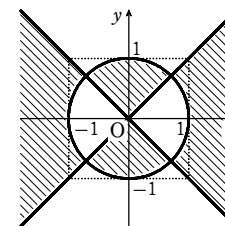
$$y < x, y > -x \text{ または } y > x, y < -x$$

[2] $x^2 + y^2 - 1 < 0$ のとき $(x + y)(x - y) < 0$ から

$$y < x, y < -x \text{ または } y > x, y > -x$$

よって, 求める z の範囲は右図のようになる.

ただし, 境界線上の点を含まない.



4

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

$$\begin{aligned} (1) |u_i|^2 &= u_i \overline{u_i} = (z_i - b^{-1}\alpha w_i) \overline{(z_i - b^{-1}\alpha w_i)} \\ &= (z_i - b^{-1}\alpha w_i) (\overline{z_i} - \overline{b^{-1}\alpha w_i}) \\ &= |z_i|^2 - b^{-1}(\overline{\alpha z_i} \overline{w_i} + \alpha \overline{z_i} w_i) + b^{-2}|\alpha|^2 |w_i|^2 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |u_i|^2 &= \sum_{i=1}^n \{ |z_i|^2 - b^{-1}(\overline{\alpha z_i} \overline{w_i} + \alpha \overline{z_i} w_i) + b^{-2}|\alpha|^2 |w_i|^2 \} \\ &= \sum_{i=1}^n |z_i|^2 - b^{-1}(\overline{\alpha \alpha} + \alpha \overline{\alpha}) + b^{-2}|\alpha|^2 b \\ &= \sum_{i=1}^n |z_i|^2 - 2b^{-1}|\alpha|^2 + b^{-1}|\alpha|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |z_i|^2 - \frac{|\alpha|^2}{b} \end{aligned}$$

ゆえに, 与えられた等式は成り立つ.

(2) $\sum_{i=1}^n |u_i|^2 \geq 0$ であるから, (1) より $\sum_{i=1}^n |z_i|^2 - \frac{|\alpha|^2}{b} \geq 0 \cdots \cdots ①$

$b > 0$ であるから, ① の両辺に b を掛けて整理すると $|\alpha|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) b$

$$|\alpha| \geq 0, \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \geq 0 \text{ であるから } |\alpha| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2} \sqrt{b}$$

ゆえに, 与えられた不等式は成り立つ.

5

$$\text{【解答】 (ア) } r + \frac{1}{r} \quad (\text{イ}) \quad r^n + \frac{1}{r^n} \quad (\text{ウ}) \quad r^n - \frac{1}{r^n} \quad (\text{エ}) \quad \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$$

$$(\text{オ}) \quad \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$$

【解説】

$$\alpha^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$\frac{1}{\alpha^n} = (\alpha^n)^{-1} = (r^n)^{-1} (\cos n\theta + i \sin n\theta)^{-1} = \frac{1}{r^n} \{ \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta) \}$$

$$= \frac{1}{r^n} (\cos n\theta - i \sin n\theta)$$

$$\text{したがって } z_n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) + \frac{1}{r^n} (\cos n\theta - i \sin n\theta)$$

$$= \left(r^n + \frac{1}{r^n} \right) \cos n\theta + i \left(r^n - \frac{1}{r^n} \right) \sin n\theta$$

$$\text{よって } f_1(r) = {}^7r + \frac{1}{r}, f_n(r) = {}^1r^n + \frac{1}{r^n}, g_n(r) = {}^5r^n - \frac{1}{r^n}$$

$$z_1 = \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \text{ であるから}$$

$$w = z_1 + \frac{1}{2}i = \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + i \left\{ \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta + \frac{1}{2} \right\}$$

ゆえに, w の虚部の絶対値が 1 以下となるときの

$$\left| \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta + \frac{1}{2} \right| \leq 1$$

$$-1 \leq \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta + \frac{1}{2} \leq 1$$

$$-\frac{3}{2} \leq \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \leq \frac{1}{2} \cdots \cdots ①$$

θ がすべての実数を動くとき, $\left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta$ の最大値は $\left| r - \frac{1}{r} \right|$, 最小値は $-\left| r - \frac{1}{r} \right|$

である.

ゆえに, 実数 θ のどのような値に対しても, w の虚部の絶対値が 1 以下となるための

条件は, ① から $-\frac{3}{2} \leq \left| r - \frac{1}{r} \right|$ かつ $\left| r - \frac{1}{r} \right| \leq \frac{1}{2}$

$$\text{すなわち } \left| r - \frac{1}{r} \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$\left| r - \frac{1}{r} \right| \leq \frac{1}{2} \text{ から } -\frac{1}{2} \leq r - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{両辺に } 2r (> 0) \text{ を掛けると } -r \leq 2r^2 - 2 \leq r$$

$$-r \leq 2r^2 - 2 \text{ から } 2r^2 + r - 2 \geq 0$$

$$\text{これを } r > 0 \text{ の範囲で解くと } r \geq \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \cdots \cdots ②$$

$$2r^2 - 2 \leq r \text{ から } 2r^2 - r - 2 \leq 0$$

$$\text{これを } r > 0 \text{ の範囲で解くと } 0 < r \leq \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \cdots \cdots ③$$

章末問題C

②, ③ から, 求める r の値の範囲は
$$\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{17}}{4}} \leq r \leq \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{17}}{4}}$$

6

【解答】 略

【解説】

正三角形 ABC の 3 頂点がすべて有理点であると仮定する。

複素数平面上で, A (0), B ($a+bi$), C ($c+di$) (a, b, c, d は有理数, $ab \neq 0$ かつ $cd \neq 0$) とおける。

A の周りに B を $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転させると, C に一致するから

$$\begin{aligned} c+di &= (a+bi) \left\{ \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) \right\} = (a+bi) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= \frac{1}{2} \{ (a \mp \sqrt{3}b) + (b \pm \sqrt{3}a)i \} \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

よって $2c-a = \pm\sqrt{3}b, 2d-b = \pm\sqrt{3}a$

$2c-a, 2d-b$ は有理数で, $\pm\sqrt{3}b, \pm\sqrt{3}a$ は無理数であるから, これは矛盾する。したがって, 3 つの頂点が有理点である正三角形は存在しない。

7

【解答】 (1) 略 (2) $x=0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$ (3) 略

【解説】

(1) 整数 n に対し, ド・モアブルの定理から

$$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^n} &= z^{-n} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) \\ &= \cos n\theta - i\sin n\theta \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①+② より $2\cos n\theta = z^n + \frac{1}{z^n}$ ゆえに $\cos n\theta = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right)$

①-② より $2i\sin n\theta = z^n - \frac{1}{z^n}$ ゆえに $\sin n\theta = \frac{1}{2i} \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right) = -\frac{i}{2} \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right)$

(2) $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$ であるから, (1) で $\theta = x$ とすれば

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\left(z + \frac{1}{z} \right)^2 - 2 \right) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 3x = \frac{1}{2} \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right) = \frac{1}{2} \left(\left(z + \frac{1}{z} \right)^3 - 3 \left(z + \frac{1}{z} \right) \right) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

ゆえに, $\cos x = t$ とおくと, 与式は

$$t + (2t^2 - 1) - (4t^3 - 3t) = 1$$

$$2t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t+1)(t-1)(2t-1) = 0 \quad \text{よって} \quad t = -1, 1, \frac{1}{2}$$

$0 \leq x < 2\pi$ であるから $x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$

(3) $\sin^2 20^\circ = \frac{1-\cos 40^\circ}{2}, \sin^2 40^\circ = \frac{1-\cos 80^\circ}{2}, \sin^2 60^\circ = \frac{1-\cos 120^\circ}{2},$

$$\sin^2 80^\circ = \frac{1-\cos 160^\circ}{2}$$

であるから, (1) で $\theta = 40^\circ$ とすると

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ$$

$$= 2 - \frac{1}{2} (\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 120^\circ + \cos 160^\circ)$$

$$= 2 - \frac{1}{4} \left(z + \frac{1}{z} + z^2 + \frac{1}{z^2} + z^3 + \frac{1}{z^3} + z^4 + \frac{1}{z^4} \right)$$

ここで, $z^9 = \cos 360^\circ + i\sin 360^\circ = 1$ であるから, $k=1, 2, 3, 4$ に対し

$$\frac{1}{z^k} = z^{-k} = z^9 \cdot z^{-k} = z^{9-k}$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} \sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ &= 2 - \frac{1}{4} (z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8) \\ &= 2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{z(1-z^8)}{1-z} = 2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{z-z^9}{1-z} \\ &= 2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{z-1}{1-z} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

8

【解答】 (1) $\alpha = \cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3}$

$$(2) \quad p_2 = \frac{k(6-k)}{18}, \quad p_3 = \frac{12-6k+k^2}{12}, \quad p_4 = \frac{k^2(6-k)^2}{216}$$

$$(3) \quad m+2l \text{ が } 3 \text{ の倍数} \quad (4) \quad p_n = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\}$$

【解説】

(1) $\alpha = \cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3}$

(2) $\alpha^3 = \cos \pi + i\sin \pi = -1, \alpha^6 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$ であり, 自然数 m に対して, 次のことが成り立つ。

$$\alpha^m \text{ が実数} \iff m \text{ が } 3 \text{ の倍数} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$w_2 = z_1 z_2$ は $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ のいずれかであり, w_2 が実数となるのは, $w_2 = \alpha^3$ となる場合である。

$w_2 = \alpha^3$ となるのは, 2 回の試行で k 以下の目が 1 回, k より大きい目が 1 回出る場合であるから $p_2 = {}_2C_1 \left(\frac{k}{6} \right) \left(\frac{6-k}{6} \right) = \frac{k(6-k)}{18}$

$w_3 = z_1 z_2 z_3$ は $\alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6$ のいずれかであり, w_3 が実数となるのは,

$w_3 = \alpha^3, \alpha^6$ となる場合である。

$w_3 = \alpha^3, \alpha^6$ となるのは, 3 回の試行で 3 回とも k 以下の目が出る場合, または 3 回とも k より大きい目が出る場合であるから

$$\begin{aligned} p_3 &= \left(\frac{k}{6} \right)^3 + \left(\frac{6-k}{6} \right)^3 = \frac{k^3 + (6-k)^3}{6^3} = \frac{6^3 - 3 \cdot 6^2 \cdot k + 3 \cdot 6 \cdot k^2 + k^3}{6^3} \\ &= \frac{12-6k+k^2}{12} \end{aligned}$$

$w_4 = z_1 z_2 z_3 z_4$ は $\alpha^4, \alpha^5, \alpha^6, \alpha^7, \alpha^8$ のいずれかであり, w_4 が実数となるのは,

$w_4 = \alpha^6$ となる場合である。

$w_4 = \alpha^6$ となるのは, 4 回の試行で k 以下の目が 2 回, k より大きい目が 2 回出る場合

であるから $p_4 = {}_4C_2 \left(\frac{k}{6} \right)^2 \left(\frac{6-k}{6} \right)^2 = \frac{k^2(6-k)^2}{216}$

(3) k 以下の目が m 回, k より大きい目が l 回出たとき

$$w_n = \alpha^m \cdot (\alpha^2)^l = \alpha^{m+2l}$$

① から, w_n が実数であるための条件は, $m+2l$ が 3 の倍数であることである。

(4) w_{n+1} が実数となる確率が p_{n+1} である。

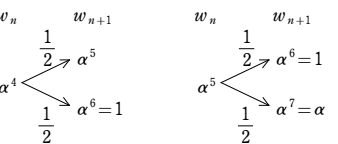
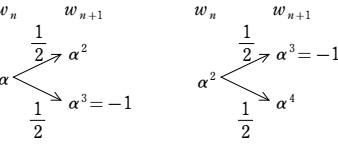
w_n は α の累乗で表され, $\alpha^6 = 1$ であるから, w_n は $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3 (= -1), \alpha^4, \alpha^5$ のいずれかである。

[1] $w_n = \pm 1$ のとき

w_{n+1} は $\pm \alpha, \pm \alpha^2$ のいずれかであるから, w_{n+1} は実数にならない。

[2] $w_n = \alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^5$ のとき

推移図を考えると, 次のようになる。



いずれの場合も, $n+1$ 回目の試行で w_{n+1} が実数となる確率は $\frac{1}{2}$

また, $w_n = \alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^5$ となる確率は, w_n が実数でない確率であるから

$$1 - p_n$$

よって, w_{n+1} が実数となる確率は $\frac{1}{2}(1 - p_n)$

[1], [2] から $p_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - p_n)$

したがって $p_{n+1} = -\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}$

この式を変形すると $p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \left(p_n - \frac{1}{3} \right)$

よって, 数列 $\left\{ p_n - \frac{1}{3} \right\}$ は公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列である。

その初項は $p_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

ゆえに $p_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ すなわち $p_n = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\}$

9

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n|^2 - (|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2)$
 $= (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)(\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}) - (z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + \cdots + z_n \overline{z_n})$

$$= \sum_{p=2}^n \sum_{q=1}^{p-1} (z_p \overline{z_q} + \overline{z_p} z_q) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで, $\arg z_k = \alpha_k, |z_k| = r_k$ とすると

$$z_p \overline{z_q} + \overline{z_p} z_q$$

章末問題C

$$\begin{aligned} &=r_{\rho}(\cos\alpha_{\rho}+i\sin\alpha_{\rho})r_{\rho}(\cos\alpha_q-i\sin\alpha_q)+r_{\rho}(\cos\alpha_{\rho}-i\sin\alpha_{\rho})r_{\rho}(\cos\alpha_q+i\sin\alpha_q) \\ &=r_{\rho}r_{\rho}(2\cos\alpha_{\rho}\cos\alpha_q+2\sin\alpha_{\rho}\sin\alpha_q)=2r_{\rho}r_{\rho}\cos(\alpha_{\rho}-\alpha_q) \end{aligned}$$

ここで、 $0^{\circ}\leq\alpha_{\rho}\leq 90^{\circ}$ 、 $0^{\circ}\leq\alpha_q\leq 90^{\circ}$ から $-90^{\circ}\leq\alpha_{\rho}-\alpha_q\leq 90^{\circ}$

よって $\cos(\alpha_{\rho}-\alpha_q)\geq 0$
ゆえに $z_{\rho}\overline{z_q}+\overline{z_{\rho}}z_q\geq 0$

よって、 $\sum_{\rho=2}^n\sum_{q=1}^{\rho-1}(z_{\rho}\overline{z_q}+\overline{z_{\rho}}z_q)\geq 0$ であるから、① より

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|^2-(|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2)\geq 0$$

すなわち

$$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2\leq |z_1+z_2+\cdots+z_n|^2$$

(2) $0^{\circ}\leq\theta_k\leq 90^{\circ}$ であるから、 $z_k=\cos\theta_k+i\sin\theta_k$ において (1) が利用できる。

条件から

$$\begin{aligned} &|z_1+z_2+\cdots+z_n|^2 \\ &=|\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n+i(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n)|^2 \\ &=(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n)^2+(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n)^2 \\ &=1+(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n)^2 \end{aligned}$$

また $|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2=1^2+1^2+\cdots+1^2=n$

よって、(1) から $n\leq 1+(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n)^2$

すなわち $n-1\leq(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n)^2$

$0^{\circ}\leq\theta_k\leq 90^{\circ}$ であるから $\sin\theta_k\geq 0$

よって $\sqrt{n-1}\leq\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n$

10

【解答】 略

【解説】

条件 (b) から $z_{n+1}-z_n=(\cos\theta^{\circ}+i\sin\theta^{\circ})(z_n-z_{n-1})$

よって、 $\cos\theta^{\circ}+i\sin\theta^{\circ}=\alpha$ とおくと、数列 $\{z_{n+1}-z_n\}$ ($n\geq 0$) は初項 $z_1-z_0=a$ 、公比 α の等比数列であるから $z_{n+1}-z_n=a\alpha^n$ ($n\geq 0$)

よって、 $n\geq 1$ のとき $z_n=z_0+\sum_{k=0}^{n-1}a\alpha^k=\sum_{k=0}^{n-1}a\alpha^k$

$$0^{\circ}<\theta^{\circ}<90^{\circ} \text{ より、} \alpha\neq 1 \text{ であるから } z_n=\frac{a(1-\alpha^n)}{1-\alpha} \quad \cdots \cdots \text{ ①}$$

ゆえに、 $z_n=z_0$ となる n ($n\geq 1$) が存在するとき、 $a\neq 0$ であるから、① より

$$\alpha^n=1 \quad \text{よって} \quad \cos(n\theta^{\circ})+i\sin(n\theta^{\circ})=1$$

ゆえに $n\theta=360k$ (k は整数)

よって、 $\theta=\frac{360k}{n}$ であるから、 θ は有理数である。

逆に、 θ が有理数のとき、 $\theta=\frac{q}{p}$ (p は自然数、 q は整数) と表される。

このとき $360p\theta=360q$

$n=360p$ とすると、 n は自然数であり

$$\cos(n\theta^{\circ})+i\sin(n\theta^{\circ})=\cos(360q^{\circ})+i\sin(360q^{\circ})=1$$

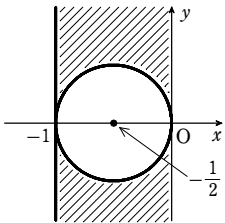
ゆえに、 $(\cos\theta^{\circ}+i\sin\theta^{\circ})^n=1$ すなわち $\alpha^n=1$ であるから、① より $z_n=0$

すなわち、 $z_n=z_0$ となる n が存在する。

以上により、題意は示された。

11

【解答】 図 境界線を含まない



【解説】

$$\begin{aligned} AB &=|z-1| \\ BC &=|z^2-z|=|z||z-1| \\ AC &=|z^2-1|=|z+1||z-1| \end{aligned}$$

A, B, C が鋭角三角形をなすならば、AB, BC, AC はいずれも 0 でないから

$$\begin{aligned} z &\neq 0, \pm 1 \quad \cdots \cdots \text{①} \\ \text{このもとで、} |z-1| &\neq 0 \text{ より } \triangle ABC \text{ は 3 辺の長さが} \\ a &=1, b=|z|, c=|z+1| \end{aligned}$$

の三角形 T と相似である。

よって、 $\triangle ABC$ が鋭角三角形であることは、三角形 T が鋭角三角形であることと同値で、その条件は

$$\begin{cases} a^2+b^2>c^2 & \cdots \cdots \text{②} \\ b^2+c^2>a^2 & \cdots \cdots \text{③} \\ c^2+a^2>b^2 & \cdots \cdots \text{④} \end{cases}$$

② から

$$\begin{aligned} 1+|z|^2 &>|z+1|^2 \\ 1+|z|^2 &>|z|^2+z+\overline{z}+1 \\ z+\overline{z} &<0 \quad \cdots \cdots \text{②'} \end{aligned}$$

③ から

$$\begin{aligned} |z|^2+|z+1|^2 &>1 \\ 2|z|^2+z+\overline{z} &>0 \\ \left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{2}\right) &>\frac{1}{4} \\ \left|z+\frac{1}{2}\right|^2 &>\frac{1}{4} \end{aligned}$$

ゆえに $\left|z+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \text{③'}$

④ から

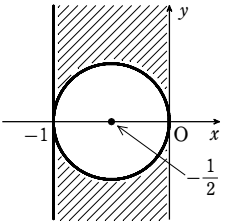
$$\begin{aligned} |z+1|^2+1 &>|z|^2 \\ |z|^2+z+\overline{z}+1+1 &>|z|^2 \\ z+\overline{z} &>-2 \quad \cdots \cdots \text{④'} \end{aligned}$$

$z=x+yi$ (x, y は実数) とおくと、②', ④' から

$$-1< x < 0 \quad \cdots \cdots \text{⑤}$$

③', ⑤ がともに成り立つならば、① も成り立つ。

よって、 z の存在範囲は右の図の斜線部分である。境界線上の点を含まない。



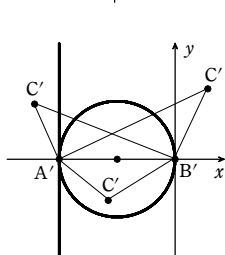
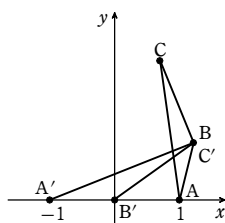
【参考】 複素数 z は ① を満たすから、 $A(1), B(z), C(z^2)$ を実軸方向に -1 だけ平行移動して $\frac{1}{|z-1|}$ 倍し、原点を中心に $-\arg(z-1)$ 回転し、さらに実軸方向 -1 だけ平行移動させると、 A, B, C はそれぞれ $A'(-1), B'(0), C'(z)$ に移る。

このとき、 A', B' は定点で、 $C'(z)$ のみ動く。

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ であるから、 $\triangle ABC$ が鋭角三角形であることと $\triangle A'B'C'$ が鋭角三角形であることは同値である。

$$\begin{aligned} \angle A'B'C' \text{ が直角または鈍角} &\Leftrightarrow x \geq 0 \\ \angle B'C'A' \text{ が直角または鈍角} &\Leftrightarrow \left|z+\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2} \\ \angle C'A'B' \text{ が直角または鈍角} &\Leftrightarrow x \leq -1 \end{aligned}$$

であるから、鋭角三角形になるための z の存在範囲は解答の図ようになる。



12

【解答】 略

【解説】

C が $1, -1$ を通るから、 C の中心は虚軸上にある。

よって、中心を表す複素数を bi (b は実数) とおく。

C の半径の 2 乗は $|1-bi|^2=1+b^2$

ここで $|\alpha-bi|^2=(\alpha-bi)(\alpha+bi)=(\alpha-bi)(\overline{\alpha}+bi)$

$$=|\alpha|^2+(\alpha-\overline{\alpha})bi+b^2$$

これが半径の 2 乗に等しいから

$$|\alpha|^2+(\alpha-\overline{\alpha})bi+b^2=1+b^2$$

すなわち $(\alpha-\overline{\alpha})bi=1-|\alpha|^2 \quad \cdots \cdots \text{①}$

また $\left|-\frac{1}{\alpha}-bi\right|^2=\left(-\frac{1}{\alpha}-bi\right)\left(-\frac{1}{\alpha}+bi\right)=\left(-\frac{1}{\alpha}-bi\right)\left(-\frac{1}{\alpha}+bi\right)$

$$=\frac{1}{|\alpha|^2}+\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right)bi+b^2=\frac{1}{|\alpha|^2}-\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{|\alpha|^2}bi+b^2$$

① から $\left|-\frac{1}{\alpha}-bi\right|^2=\frac{1}{|\alpha|^2}-\frac{1-|\alpha|^2}{|\alpha|^2}+b^2=1+b^2$

これは半径の 2 乗に等しい。

ゆえに、 C は $-\frac{1}{\alpha}$ も通る。

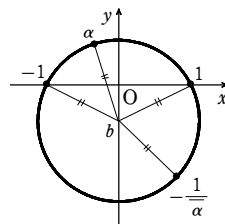
【別解】 $|\alpha|=r$ とおくと $-\frac{1}{\alpha}=-\frac{\alpha}{\alpha\alpha}=-\frac{1}{r^2}\alpha$

よって、3 点 $\alpha, 0, -\frac{1}{\alpha}$ はこの順に一直線上にある。

ここで $|\alpha|\times\left|-\frac{1}{\alpha}\right|=r\cdot\frac{1}{|\alpha|}=r\cdot\frac{1}{r}=1$

また $1\times 1=1$

よって、4 点 $\alpha, -\frac{1}{\alpha}, 1, -1$ と点 O について、方ベ



また $\left|-\frac{1}{\alpha}-bi\right|^2=\left(-\frac{1}{\alpha}-bi\right)\left(-\frac{1}{\alpha}+bi\right)=\left(-\frac{1}{\alpha}-bi\right)\left(-\frac{1}{\alpha}+bi\right)$

$$=\frac{1}{|\alpha|^2}+\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right)bi+b^2=\frac{1}{|\alpha|^2}-\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{|\alpha|^2}bi+b^2$$

① から $\left|-\frac{1}{\alpha}-bi\right|^2=\frac{1}{|\alpha|^2}-\frac{1-|\alpha|^2}{|\alpha|^2}+b^2=1+b^2$

これは半径の 2 乗に等しい。

ゆえに、 C は $-\frac{1}{\alpha}$ も通る。

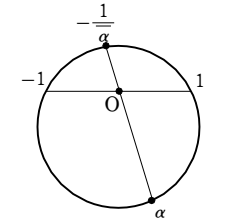
【別解】 $|\alpha|=r$ とおくと $-\frac{1}{\alpha}=-\frac{\alpha}{\alpha\alpha}=-\frac{1}{r^2}\alpha$

よって、3 点 $\alpha, 0, -\frac{1}{\alpha}$ はこの順に一直線上にある。

ここで $|\alpha|\times\left|-\frac{1}{\alpha}\right|=r\cdot\frac{1}{|\alpha|}=r\cdot\frac{1}{r}=1$

また $1\times 1=1$

よって、4 点 $\alpha, -\frac{1}{\alpha}, 1, -1$ と点 O について、方ベ



章末問題C

きの定理の逆により, $1, -1, \alpha, -\frac{1}{\alpha}$ は同一円周上にある.

[13]

解答 (1) β, γ は $1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z, 1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

$$(2) \arg \alpha = \frac{\pi}{9}, \arg \beta = \frac{4}{9}\pi, \arg \gamma = \frac{16}{9}\pi$$

解説

(1) $\triangle ABC$ の重心を G とする. $\triangle ABC$ は正三角形であるから重心 G は外心でもある.

G を表す複素数は $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$ すなわち 1

よって, B または C は点 G を中心として点 A を $\frac{2}{3}\pi$ または $-\frac{2}{3}\pi$ だけ回転させた点である.

ゆえに, β, γ は $1 + \left\{ \cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right) \right\}(\alpha - 1)$

すなわち $1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z, 1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

(2) 正三角形 ABC の 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ であることから $AG = 1$

すなわち $|z| = 1$

一方, (1) から $\alpha\beta\gamma = (1+z)(1-z+z^2) = 1+z^3$

よって $|1+z^3| = 1$ かつ $(1+z^3 \text{ の虚部}) > 0$

$z = \cos\theta + i \sin\theta$ とおくと $1+z^3 = (1+\cos 3\theta) + i \sin 3\theta$

$|1+z^3| = 1$ から $|1+z^3|^2 = 1$

よって $(1+\cos 3\theta)^2 + \sin^2 3\theta = 1$

すなわち $\cos 3\theta = -\frac{1}{2}$

このとき $\sin 3\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ [$(1+z^3 \text{ の虚部}) > 0$ から]

したがって $z^3 = \cos\left(\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right)$ (k は整数)

$3\theta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ から $\theta = \frac{2}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi$

$0 \leq \theta < 2\pi$ とすると $\theta = \arg z = \frac{2}{9}\pi, \frac{8}{9}\pi, \frac{14}{9}\pi$

このとき, 円周角の定理により $\arg(1+z) = \frac{\pi}{9}, \frac{4}{9}\pi, \frac{16}{9}\pi$

題意により, これらが $\arg \alpha, \arg \beta, \arg \gamma$ であるから, 条件より

$$\arg \alpha = \frac{\pi}{9}, \arg \beta = \frac{4}{9}\pi, \arg \gamma = \frac{16}{9}\pi$$

[14]

解答 (1) 中心は点 $\frac{1}{2}$, 半径は $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (2) 略

解説

(1) $a_1 = 1, a_2 = i, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ から $a_3 = 1+i, a_4 = 1+2i$

ゆえに $b_1 = i, b_2 = \frac{1+i}{i} = 1-i, b_3 = \frac{1+2i}{1+i} = \frac{(1+2i)(1-i)}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

$$\arg \frac{b_2 - b_3}{b_1 - b_3} = \arg \frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i}{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i} = \arg i = \frac{\pi}{2}$$

よって, 円 C は 2 点 $i, 1-i$ を直径の両端とする円である。

したがって, 中心は $\frac{i+(1-i)}{2} = \frac{1}{2}$, 半径は $\left|\frac{1}{2} - i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ となる。

(2) $\left|b_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ …… [A] であることを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

(1) から, [A] は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

$\left|b_k - \frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ が成り立つと仮定する。

$a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ から $\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} = 1 + \frac{a_k}{a_{k+1}}$

ゆえに $b_{k+1} = 1 + \frac{1}{b_k}$ よって $b_k = \frac{1}{b_{k+1} - 1}$

$\left|b_k - \frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ であるから $\left|\frac{1}{b_{k+1} - 1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

ゆえに $\left|\frac{3 - b_{k+1}}{b_{k+1} - 1}\right| = \sqrt{5}$

よって $|b_{k+1} - 3| = \sqrt{5}|b_{k+1} - 1|$

したがって $|b_{k+1} - 3|^2 = 5|b_{k+1} - 1|^2$

$$(b_{k+1} - 3)(\overline{b_{k+1}} - 3) = 5(b_{k+1} - 1)(\overline{b_{k+1}} - 1)$$

$$4b_{k+1}\overline{b_{k+1}} - 2b_{k+1} - 2\overline{b_{k+1}} = 4$$

$$(2b_{k+1} - 1)(2\overline{b_{k+1}} - 1) = 5$$

$$|2b_{k+1} - 1|^2 = 5$$

よって $|2b_{k+1} - 1| = \sqrt{5}$

ゆえに $\left|b_{k+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

よって, $n=k+1$ のときも [A] が成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数 n について, $\left|b_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ となり, b_n は円 C 上にある。