

1

解説

$P(t, t^2-1)$ とする。

$y'=2x$ より、点 P における C の接線 ℓ の方程式は

$$y-(t^2-1)=2t(x-t)$$

すなわち $y=2tx-t^2-1$

放物線 $y=x^2-1$ は y 軸に関して対称であるから、 $t>0$ の場合のみ考えればよい。

ℓ と y 軸との交点を Q とすると、 $t>0$ のとき

$$S-T=(S+T)-2T$$

$$=\triangle OPQ-2\int_0^t\{(x^2-1)-(2tx-t^2-1)\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\times(t^2+1)\times t-2\int_0^t(x^2-2tx+t^2)dx$$

$$=\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t-2\int_0^t(x-t)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t-2\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_0^t$$

$$=-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t$$

$$f(t)=-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t \quad (t>0) \text{ とすると}$$

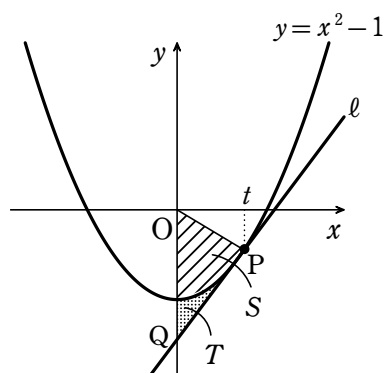
$$f'(t)=-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(t+1)(t-1)$$

$$f'(t)=0 \text{ とすると、} t>0 \text{ より } t=1$$

$t>0$ における $f(t)$ の増減表は右のようになる。

したがって、 $f(t)$ は $t=1$ のとき、最大値 $\frac{1}{3}$ をとる。

ゆえに、 $S-T$ の最大値は $\frac{1}{3}$



t	0	...	1	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		↗	$\frac{1}{3}$	↘

2

解説

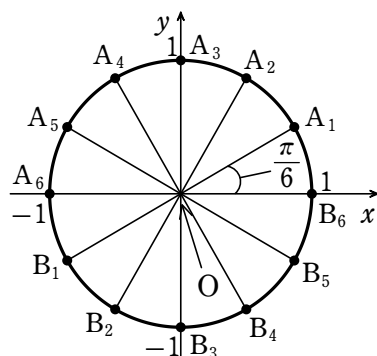
2点 A, B は原点 O を中心とする半径 1 の円周上の点である。

a, b の値に応じて $A_a \left(\cos \frac{a}{6} \pi, \sin \frac{a}{6} \pi \right)$,

$B_b \left(\cos \frac{b+6}{6} \pi, \sin \frac{b+6}{6} \pi \right)$ とすると、各点は図

のようになる。

よって、2点 A, B の組合せは全部で 36 通りあり、 $\angle A_a O B_b = \theta$ とすると、 θ は次の表のようになる。



(1) 3点 O, A_a , B_b が一直線上にあると

き $\theta = \pi$

表から、 $\theta = \pi$ となる 2点 A, B の組合せは 6 通り

よって、求める確率は $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(2) $\theta = \pi$ のとき、3点 O, A_a , B_b は一直線上にあるから $0 < \theta < \pi$

$OA_a = OB_b = 1$ であるから、 $\triangle OA_a B_b$ の面積は

$$\frac{1}{2} OA_a \cdot OB_b \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta$$

よって、 $\triangle OA_a B_b$ の面積が $\frac{1}{4}$ 以下に

なるとき $\frac{1}{2} \sin \theta \leq \frac{1}{4}$

ゆえに $\sin \theta \leq \frac{1}{2}$

$0 < \theta < \pi$ であるから $0 < \theta \leq \frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6} \leq \theta < \pi$

表から、これを満たす 2点 A, B の組合せは 12 通り

よって、求める確率は $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

(3) 2点 A, B 間の距離が 1 以下であるという事象を考える。

$\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき、 $\triangle OA_a B_b$ は正三角形であるから $A_a B_b = 1$

よって、 $A_a B_b \leq 1$ のとき $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$

表から、これを満たす 2点 A, B の組合せは 6 通り

ゆえに、2点 A, B 間の距離が 1 以下である確率は $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

2点 A, B 間の距離が 1 より大きいという事象は、2点 A, B 間の距離が 1 以下であるという事象の余事象である。

θ	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
A_2	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
A_3	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{2}$
A_4	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$
A_5	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{5}{6}\pi$
A_6	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

よって、求める確率は $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

3

解説

(1) $\angle AOB$ は鋭角であるから $\cos \angle AOB > 0$

$$OA = 3, OC = 1, \angle ACO = 90^\circ \text{ から } \cos \angle AOB = \frac{1}{3}$$

$$\text{よって } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 3 \times t \times \frac{1}{3} = t$$

(2) 点 R は直線 OB 上にあるから

$$\vec{OR} = k\vec{OB} \quad (k \text{ は実数})$$

と表される。

$$AR \perp OP \text{ から } \vec{AR} \cdot \vec{OP} = 0$$

$$\text{よって } (\vec{OR} - \vec{OA}) \cdot \vec{OP} = 0 \quad \dots\dots ①$$

ここで、 $AP : PB = 2 : 1$ から

$$\vec{OP} = \frac{\vec{OA} + 2\vec{OB}}{2+1} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + 2\vec{OB})$$

$$\text{したがって、① から } (k\vec{OB} - \vec{OA}) \cdot \frac{1}{3}(\vec{OA} + 2\vec{OB}) = 0$$

$$\text{よって } (\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 2|\vec{OB}|^2)k - |\vec{OA}|^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$$

$$\text{ゆえに } (t + 2t^2)k - 9 - 2t = 0$$

$$t(2t+1)k = 2t+9$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = t > 0 \text{ より、} t(2t+1) > 0 \text{ であるから } k = \frac{2t+9}{t(2t+1)}$$

$$\text{よって } \vec{OR} = \frac{2t+9}{t(2t+1)}\vec{OB}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } |\vec{OR}| &= \left| \frac{2t+9}{t(2t+1)}\vec{OB} \right| = \frac{2t+9}{t(2t+1)}|\vec{OB}| \\ &= \frac{2t+9}{t(2t+1)} \times t = \frac{2t+9}{2t+1} \end{aligned}$$

$$\text{したがって } OR = \frac{2t+9}{2t+1}$$

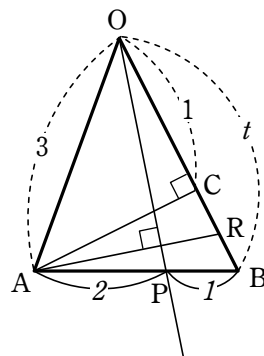
(3) 点 R が線分 MB 上にあるための条件は $OM \leq OR \leq OB$

$$\text{よって } \frac{t}{2} \leq \frac{2t+9}{2t+1} \leq t$$

$$2t+1 > 0 \text{ であるから } \frac{1}{2}t(2t+1) \leq 2t+9 \leq t(2t+1)$$

$$\text{したがって } \begin{cases} t(2t+1) \leq 2(2t+9) & \dots\dots ② \\ 2t+9 \leq t(2t+1) & \dots\dots ③ \end{cases}$$

$$② \text{ から } 2t^2 - 3t - 18 \leq 0$$



$$\text{よって} \quad \frac{3-3\sqrt{17}}{4} \leq t \leq \frac{3+3\sqrt{17}}{4} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \text{ から} \quad 2t^2 - t - 9 \geq 0$$

$$\text{よって} \quad t \leq \frac{1-\sqrt{73}}{4}, \quad \frac{1+\sqrt{73}}{4} \leq t \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

$$0 < t \text{ と } \textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ の共通範囲をとって} \quad \frac{1+\sqrt{73}}{4} \leq t \leq \frac{3+3\sqrt{17}}{4}$$