

1 [2023 神戸大]

解説

- (1) A が 2 枚持っている状況で操作 (P) を 1 回行い、A が持っている枚数が 3 枚となるのは、操作 (P) で表が出た枚数が

A : 2 枚 または 「A : 1 枚, B : 0 枚」

$$\text{のときであるから} \quad p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

- (2) A が 2 枚持っている状況で操作 (P) を 1 回行い、A が持っている枚数が 2 枚のままとなるのは、操作 (P) で表が出た枚数が

「A : 1 枚, B : 1 枚」 または 「A : 0 枚, B : 0 枚」

のときであるから、その確率は

$${}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\text{よって, (1) から} \quad p_2 = \frac{3}{8} \times p_1 = \frac{3}{16}$$

- (3) A が 2 枚持っている状況で操作 (P) を 1 回行い、A が持っている枚数が 1 枚となるのは、(1) から

$$1 - \left(p_1 + \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

A が 1 枚持っている状況で操作 (P) を 1 回行い、A が持っている枚数が 2 枚となるのは、操作 (P) で表が出た枚数が「A : 1 枚, B : 0 枚」のときであるから、その確率は

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

したがって、(1), (2) から

$$p_3 = \frac{3}{8} \times p_2 + \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times p_1 = \frac{5}{64}$$

$$(1) \quad \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 x$$

$$\log_{\sqrt{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = 2\log_2 x$$

$$\log_4 x^3 = 3\log_4 x = 3 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{3}{2}\log_2 x$$

$$\text{よって} \quad y = (-\log_2 x)^3 + a(2\log_2 x) \left(\frac{3}{2}\log_2 x \right)$$

$$= -(\log_2 x)^3 + 3a(\log_2 x)^2$$

$$\text{ゆえに, } t = \log_2 x \text{ とすると} \quad y = -t^3 + 3at^2$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 8 \text{ から} \quad \log_2 \frac{1}{2} \leq \log_2 x \leq \log_2 8$$

$$\text{よって} \quad -1 \leq \log_2 x \leq 3 \quad \text{すなわち} \quad -1 \leq t \leq 3$$

$$f(t) = -t^3 + 3at^2 \text{ とすると}$$

$$f'(t) = -3t^2 + 6at = -3t(t - 2a)$$

$$f'(t) = 0 \text{ とすると} \quad t = 0, 2a$$

$$[1] \quad 0 < 2a < 3 \text{ すなわち } 0 < a < \frac{3}{2} \text{ のとき}$$

$-1 \leq t \leq 3$ における $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	3
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$3a+1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4a^3$	$\searrow$	$27a-27$

$$\text{ここで} \quad 4a^3 - (3a+1) = 4a^3 - 3a - 1 \\ = (a-1)(2a+1)^2$$

$$\text{ゆえに} \quad 0 < a < 1 \text{ のとき} \quad 4a^3 < 3a+1,$$

$$1 \leq a < \frac{3}{2} \text{ のとき} \quad 4a^3 \geq 3a+1$$

$$\text{よって} \quad 0 < a < 1 \text{ のとき} \quad M = 3a+1,$$

$$1 \leq a < \frac{3}{2} \text{ のとき} \quad M = 4a^3$$

$$[2] \quad 2a \geq 3 \text{ すなわち } a \geq \frac{3}{2} \text{ のとき}$$

$-1 \leq t \leq 3$ における $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0
$f(t)$	$3a+1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$27a-27$

$$\text{ここで} \quad (27a-27) - (3a+1) = 24a-28$$

$$=24\left(a-\frac{7}{6}\right)$$

$$a \geq \frac{3}{2} \text{ であるから } a - \frac{7}{6} > 0$$

$$\text{ゆえに } 27a - 27 > 3a + 1$$

$$\text{よって } M = 27a - 27$$

[1], [2] から

$$0 < a < 1 \text{ のとき } M = 3a + 1,$$

$$1 \leq a < \frac{3}{2} \text{ のとき } M = 4a^3,$$

$$\frac{3}{2} \leq a \text{ のとき } M = 27a - 27$$

解説

$\cos 2\theta = a \sin \theta + b$ を変形すると

$$1 - 2\sin^2 \theta = a \sin \theta + b$$

よって $2\sin^2 \theta + a \sin \theta + b - 1 = 0$ …… ①

$t = \sin \theta$ とおくと、 θ が実数全体を動くとき、 $-1 \leq t \leq 1$ であり、①は

$$2t^2 + at + b - 1 = 0 \quad \text{…… ②}$$

このとき、①が実数解をもつ条件は、②が $-1 \leq t \leq 1$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことである。

$f(t) = 2t^2 + at + b - 1$ とすると

$$f(t) = 2\left(t + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} + b - 1$$

よって、放物線 $y = f(t)$ の軸は $t = -\frac{a}{4}$

頂点の y 座標は $-\frac{a^2}{8} + b - 1$

[1] $f(-1)f(1) \leq 0$ のとき

$$(-a + b + 1)(a + b + 1) \leq 0$$

よって

$$\begin{cases} -a + b + 1 \leq 0 \\ a + b + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} -a + b + 1 \geq 0 \\ a + b + 1 \leq 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} b \leq a - 1 \\ b \geq -a - 1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} b \geq a - 1 \\ b \leq -a - 1 \end{cases}$$

このとき、②は $-1 \leq t \leq 1$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ。

[2] $f(-1)f(1) > 0$ のとき

②が $-1 \leq t \leq 1$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ条件は

$$\begin{cases} -1 < -\frac{a}{4} < 1 \\ f(-1) > 0 \\ f(1) > 0 \\ -\frac{a^2}{8} + b - 1 \leq 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} -4 < a < 4 \\ b > a - 1 \\ b > -a - 1 \\ b \leq \frac{a^2}{8} + 1 \end{cases}$$

[1], [2] より、求める点 (a, b) の存在範囲は図の斜線部分。

ただし、境界線を含む。

