

1 [2025 大阪公立大]

解説

$$(1) \quad 2^{-\frac{1}{2}y} a^{2x} = 2^{-\frac{1}{2}(x^2+1)} \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \text{とする。}$$

$a > 0$ であるから、 $\textcircled{1}$ の両辺は正である。

$$\text{よって、}\textcircled{1} \text{ の両辺の } 2 \text{ を底とする対数をとると} \quad \log_2 \left(2^{-\frac{1}{2}y} a^{2x} \right) = \log_2 2^{-\frac{1}{2}(x^2+1)}$$

$$\text{ゆえに} \quad -\frac{1}{2}y + 2x \log_2 a = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

$$\text{整理すると} \quad y = x^2 + (4 \log_2 a)x + 1$$

よって、 y は x の 2 次関数であるから、 C は放物線である。

$$\begin{aligned} (2) \quad (1) \text{ より} \quad y &= x^2 + (4 \log_2 \sin \theta)x + 1 \\ &= (x + 2 \log_2 \sin \theta)^2 - (2 \log_2 \sin \theta)^2 + 1 \\ &= (x + 2 \log_2 \sin \theta)^2 - 4(\log_2 \sin \theta)^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad s = -2 \log_2 \sin \theta, \quad t = -4(\log_2 \sin \theta)^2 + 1$$

$0 < \theta < \pi$ のとき、 $0 < \sin \theta \leq 1$ であり、 $\log_2 \sin \theta$ の底 2 は 1 より大きいから

$$\log_2 \sin \theta \leq 0$$

ここで、 $\log_2 \sin \theta = k$ とおくと、 $k \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$ であり

$$\begin{aligned} |s+t| &= |-2 \log_2 \sin \theta - 4(\log_2 \sin \theta)^2 + 1| \\ &= |-4k^2 - 2k + 1| = |4k^2 + 2k - 1| \end{aligned}$$

$$|s+t| \leq 1 \text{ のとき} \quad |4k^2 + 2k - 1| \leq 1$$

$$\text{すなわち} \quad -1 \leq 4k^2 + 2k - 1 \leq 1$$

$$-1 \leq 4k^2 + 2k - 1 \text{ を解くと} \quad k \leq -\frac{1}{2}, \quad 0 \leq k \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$4k^2 + 2k - 1 \leq 1 \text{ を解くと} \quad -1 \leq k \leq \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

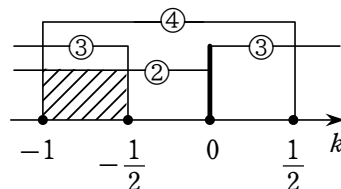
$\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ 、 $\textcircled{4}$ より、 k の値の範囲は

$$-1 \leq k \leq -\frac{1}{2}, \quad k = 0$$

$$\text{よって} \quad -1 \leq \log_2 \sin \theta \leq -\frac{1}{2}, \quad \log_2 \sin \theta = 0$$

$$\text{底 2 は 1 より大きいから} \quad \frac{1}{2} \leq \sin \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = 1$$

$$0 < \theta < \pi \text{ であるから、求める } \theta \text{ の値の範囲は} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$$



2 [2025 東京農工大]

解説

(1) 点 P の時刻 t における速度ベクトルを $\vec{v}$, 加速度ベクトルを $\vec{\alpha}$ とすると

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (-b \sin t, 2 \cos 2t)$$

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right) = (-b \cos t, -4 \sin 2t)$$

よって, 速さ $|\vec{v}|$ と加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-b \sin t)^2 + (2 \cos 2t)^2} = \sqrt{b^2 \sin^2 t + 4 \cos^2 2t}$$

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{(-b \cos t)^2 + (-4 \sin 2t)^2} = \sqrt{b^2 \cos^2 t + 16 \sin^2 2t}$$

したがって, $t = \frac{\pi}{3}$ における点 P の速さは

$$\sqrt{b^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} b^2 + 1}$$

$$\text{加速度の大きさは } \sqrt{b^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 16 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} b^2 + 12}$$

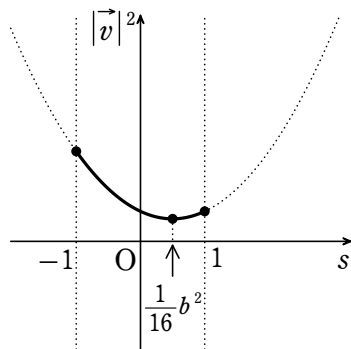
$$(2) |\vec{v}|^2 = b^2 \sin^2 t + 4 \cos^2 2t = 4 \cos^2 2t + b^2 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} = 4 \cos^2 2t - \frac{1}{2} b^2 \cos 2t + \frac{1}{2} b^2$$

ここで, $\cos 2t = s$ とおくと $-1 \leq s \leq 1$

$$\text{よって } |\vec{v}|^2 = 4s^2 - \frac{1}{2} b^2 s + \frac{1}{2} b^2 = 4 \left(s - \frac{1}{16} b^2 \right)^2 - \frac{1}{64} b^4 + \frac{1}{2} b^2$$

また, $\frac{1}{16} b^2 > 0$ を満たす。[1] $0 < \frac{1}{16} b^2 < 1$ すなわち $0 < b < 4$ のとき $|\vec{v}|^2$ が最小になるのは, $s = \frac{1}{16} b^2$ のときで,

$$\text{その最小値は } -\frac{1}{64} b^4 + \frac{1}{2} b^2$$

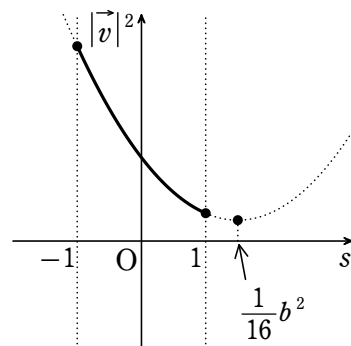
[2] $\frac{1}{16} b^2 \geq 1$ すなわち $b \geq 4$ のとき $|\vec{v}|^2$ が最小になるのは, $s = 1$ のときで,

$$\text{その最小値は } 4 \cdot 1^2 - \frac{1}{2} b^2 \cdot 1 + \frac{1}{2} b^2 = 4$$

よって, 点 P の速さ $|\vec{v}|$ の最小値は

$$0 < b < 4 \text{ のとき } \sqrt{-\frac{1}{64} b^4 + \frac{1}{2} b^2}$$

$$b \geq 4 \text{ のとき } \sqrt{4} = 2$$



(3) $b=2\sqrt{2}$ のとき

$$\vec{v}=(-2\sqrt{2}\sin t, 2\cos 2t)$$

$$\vec{\alpha}=(-2\sqrt{2}\cos t, -4\sin 2t)$$

$$\vec{v}\cdot\vec{\alpha}=-2\sqrt{2}\sin t\cdot(-2\sqrt{2}\cos t)+2\cos 2t\cdot(-4\sin 2t)$$

$$=8\sin t\cos t-8\sin 2t\cos 2t=4\sin 2t-8\sin 2t\cos 2t=4\sin 2t(1-2\cos 2t)$$

$|\vec{v}|\neq 0$, $|\vec{\alpha}|\neq 0$ であるから、速度ベクトル $\vec{v}$ と加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ が垂直になるのは、
 $\vec{v}\cdot\vec{\alpha}=0$ のときである。

$$\text{よって } 4\sin 2t(1-2\cos 2t)=0$$

$$\text{ゆえに } \sin 2t=0 \text{ または } \cos 2t=\frac{1}{2}$$

$$0<t<\frac{\pi}{2} \text{ すなわち } 0<2t<\pi \text{ であるから } 2t=\frac{\pi}{3}$$

$$\text{したがって } t=\frac{\pi}{6}$$

3

 [2025 大阪大]

解説

$$\angle OAP=30^\circ \text{ であるから } \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AP}|\cos 30^\circ$$

$$\overrightarrow{AO}=(0, -1, -1), \overrightarrow{AP}=(x, y-1, -1) \text{ であるから}$$

$$-(y-1)+1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{すなわち } 2(2-y)=\sqrt{6}\sqrt{x^2+(y-1)^2+1} \quad \dots\dots ①$$

$$① \text{ の右辺は正であるから } 2-y>0$$

$$\text{ゆえに } y<2$$

$$\text{これと } y\geq 0 \text{ から } 0\leq y<2$$

$$\text{このとき, } ① \text{ の両辺を 2 乗すると } 4(2-y)^2=6\{x^2+(y-1)^2+1\}$$

$$\text{すなわち } 3x^2+y^2+2y-2=0$$

$$\text{よって } x^2+\frac{(y+1)^2}{3}=1 \quad \dots\dots ②$$

したがって、点 P の軌跡は、楕円 ② の $y\geq 0$ の部分であり、右の図の実線部分のようになる。

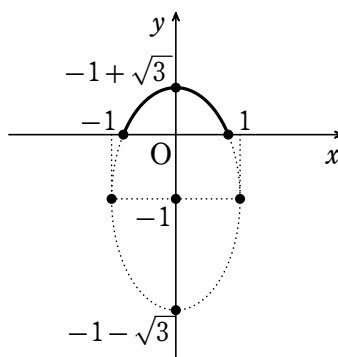
② から

$$x=\cos\theta, y=\sqrt{3}\sin\theta-1$$

と表される。

$$y\geq 0 \text{ を満たすから } \sqrt{3}\sin\theta-1\geq 0$$

$$\text{すなわち } \sin\theta\geq\frac{1}{\sqrt{3}}$$



$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ で $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす角を α とすると、 θ のとりうる値の範囲は

$$\alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha$$

ここで、 $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ から $\sin \frac{\pi}{6} < \sin \alpha < \sin \frac{\pi}{4}$

したがって、 $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$ を満たす。

よって $(x+1)(y+1) = \sqrt{3} \sin \theta (\cos \theta + 1)$

$f(\theta) = \sqrt{3} \sin \theta (\cos \theta + 1)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \sqrt{3} \{ \cos \theta (\cos \theta + 1) - \sin^2 \theta \} \\ &= \sqrt{3} \{ \cos \theta (\cos \theta + 1) - (1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) \} \\ &= \sqrt{3} (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) \end{aligned}$$

$\alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha$ において、 $\cos \theta + 1 > 0$ であるから、 $f'(\theta) = 0$ とすると

$$2 \cos \theta - 1 = 0$$

すなわち $\cos \theta = \frac{1}{2}$ よって $\theta = \frac{\pi}{3}$

$\alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha$ における $f(\theta)$ の増減表は次のようになる。

θ	α	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\pi - \alpha$
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	$f(\pi - \alpha)$

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ であるから

$$f(\alpha) = \sqrt{3} \sin \alpha (\cos \alpha + 1) = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{6}}{3} + 1 \right) = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\begin{aligned} f(\pi - \alpha) &= \sqrt{3} \sin (\pi - \alpha) \{ \cos (\pi - \alpha) + 1 \} = \sqrt{3} \sin \alpha (-\cos \alpha + 1) \\ &= \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\sqrt{6}}{3} + 1 \right) = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

したがって、 $(x+1)(y+1)$ は $\theta = \frac{\pi}{3}$ で最大値 $\frac{9}{4}$ 、 $\theta = \pi - \alpha$ で最小値 $1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ をとる。

別解 ② より、 $(y+1)^2 = 3(1-x^2)$ であるから、 $y \geq 0$ のとき $3(1-x^2) \geq 1$

これを解くと $-\frac{\sqrt{6}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$ ③

よって、 $x+1 \geq \frac{3-\sqrt{6}}{3} > 0$ 、 $y+1 > 0$ であるから $(x+1)(y+1) > 0$

したがって、 $(x+1)^2(y+1)^2$ が最大、最小となるとき、 $(x+1)(y+1)$ も最大、最小となる。

$$(x+1)^2(y+1)^2 = (x+1)^2 \cdot 3(1-x^2) = 3(x+1)^3(1-x)$$

$$\begin{aligned}
 g(x) &= 3(x+1)^3(1-x) \text{ とおくと} & g'(x) &= 9(x+1)^2(1-x) + 3(x+1)^3 \cdot (-1) \\
 & & &= 3(x+1)^2\{3(1-x) - (x+1)\} \\
 & & &= -6(x+1)^2(2x-1)
 \end{aligned}$$

③ の範囲において、 $g'(x)=0$ とすると $2x-1=0$

よって $x = \frac{1}{2}$

ゆえに、③ の範囲における $g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{\sqrt{6}}{3}$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$	↗	$\left(\frac{9}{4}\right)^2$	↘	$\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$

よって、 $g(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ で最大値 $\left(\frac{9}{4}\right)^2$ 、 $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ で最小値 $\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$ をとる。

したがって、 $(x+1)(y+1)$ は $x = \frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{9}{4}$ 、 $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ で最小値 $1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ をとる。

4 [2025 神戸大]

解説

$a \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a^2x^2 - 2a(a-1)x + 2 = a^2\left\{x^2 - \frac{2a(a-1)}{a^2}x\right\} + 2 \\
 &= a^2\left(x - \frac{a-1}{a}\right)^2 - a^2 + 2a + 1
 \end{aligned}$$

よって、放物線 $y=f(x)$ の軸は 直線 $x = 1 - \frac{1}{a}$

(1) $a=2$ のとき $f(x) = 4x^2 - 4x + 2$

放物線 $y=f(x)$ の軸は $x = 1 - \frac{1}{2}$ すなわち $x = \frac{1}{2}$

よって、 $f(n)$ が最小となる整数 n は $n=0, 1$

このとき、 $f(n)$ の値は $f(0)=f(1)=2$

したがって、 $f(n)$ は、 $n=0, 1$ のとき最小値 2 をとる。

(2) $y=f(x)$ の軸 $x = 1 - \frac{1}{a}$ について、 $a=1$ のとき

$1 - \frac{1}{a}$ は整数であり、それ以外のとき $1 - \frac{1}{a}$ は整数ではない。

$$a=1 \text{ のとき } f(x) = x^2 + 2$$

このとき、放物線 $y = f(x)$ の軸は $x=0$

よって、 $f(n)$ が最小となる整数 n は $n=0$ であり

$$f(0) = 2$$

$a \geq 3$ のとき、放物線 $y = f(x)$ の軸について

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} \leq 1 - \frac{1}{a} < 1$$

よって、 $f(n)$ が最小となる整数 n は $n=1$ であり

$$f(1) = a^2 \cdot 1^2 - 2a(a-1) \cdot 1 + 2 = -a^2 + 2a + 2$$

(1) で求めた $a=2$ の場合も含めて、 $f(n)$ の最小値とそのときの整数 n は以下ようになる。

($a=1$ のとき) $n=0$ のとき最小値 2 ;

($a=2$ のとき) $n=0, 1$ のとき最小値 2 ;

($a \geq 3$ のとき) $n=1$ のとき最小値 $-a^2 + 2a + 2$

(3) (2) と同様に、 a の値の場合を分けて考える。

$$a=-1 \text{ のとき } f(x) = x^2 - 4x + 2$$

このとき、放物線 $y = f(x)$ の軸は $x=2$

よって、 $f(n)$ が最小となる整数 n は $n=2$ であり

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 = -2$$

$$a=-2 \text{ のとき } f(x) = 4x^2 - 12x + 2$$

このとき、放物線 $y = f(x)$ の軸は $x = \frac{3}{2}$

よって、 $f(n)$ が最小となる整数 n は $n=1, 2$ であり、最小値は

$$f(1) = 4 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 2 = -6$$

$a \leq -3$ のとき、放物線 $y = f(x)$ の軸について

$$1 < 1 - \frac{1}{a} \leq \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$$

よって、 $f(n)$ が最小となる整数 n は $n=1$ であり

$$f(1) = -a^2 + 2a + 2$$

以上から、 $f(n)$ の最小値とそのときの整数 n は以下ようになる。

($a=-1$ のとき) $n=2$ のとき最小値 -2 ;

($a=-2$ のとき) $n=1, 2$ のとき最小値 -6 ;

($a \leq -3$ のとき) $n=1$ のとき最小値 $-a^2 + 2a + 2$

