

1 (1)(2)各2点 (3)(4)各3点)

a を正の定数とする。座標平面において、円 K_1 は中心が $A(a, 2)$ であり、 x 軸および直線 $\ell: 3x - 4y + 9 = 0$ に接している。

- (1) K_1 の半径を求めよ。 (2) a の値を求めよ。
- (3) ℓ と x 軸の交点を B , K_1 と x 軸の接点を C とするとき、3 点 A, B, C を通る円 K_2 の方程式を求めよ。
- (4) (3) で求めた K_2 と K_1 の 2 つの交点および原点を通る円 K_3 の方程式を求めよ。

1 (1)(2)各2点 (3)(4)各3点)

【解答】 (1) 2 (2) $a=3$ (3) $x^2+(y-1)^2=10$ (4) $x^2+y^2-3x-3y=0$

1 (1)(2)各2点 (3)(4)各3点)

【解説】

(1) $a>0$ であるから、円 K_1 の中心 $A(a, 2)$ は第1象限にあり、 x 軸に接するから、半径は2である。

(2) 直線 ℓ と円 K_1 の中心 A の距離が円の半径2に等しいから $\frac{|3a-4\cdot 2+9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$

すなわち $|3a+1|=10$

$a>0$ であるから $3a+1=10$

したがって $a=3$

(3) $a=3$ のとき $A(3, 2)$

よって、 $C(3, 0)$ である。

ℓ の方程式に $y=0$ を代入すると $x=-3$

よって $B(-3, 0)$

$\angle BCA=90^\circ$ であるから、3点 A, B, C を通る円は、線分 AB を直径とする円である。

中心の座標は、線分 AB の中点の座標を求めて $(0, 1)$

半径は点 $(0, 1)$ と点 B の距離を求めて $\sqrt{10}$

よって、円 K_2 の方程式は $x^2+(y-1)^2=10$

(4) K_1 の方程式は $(x-3)^2+(y-2)^2=4$

k を定数として、次の方程式を考える。

$$k\{x^2+(y-1)^2-10\}+(x-3)^2+(y-2)^2-4=0 \quad \cdots (*)$$

(*) は、(3) で求めた K_2 と K_1 の2つの交点を通る図形を表す。

図形(*)が原点を通るとして、(*)に $x=0, y=0$ を代入すると $-9k+9=0$

すなわち $k=1$

(*) に代入して整理すると $x^2+y^2-3x-3y=0$

これが求める円 K_3 の方程式である。

