

1 [2022 大阪公立大]

(解説)

- (1) n 回目で初めて直前の回と同じ目が出るのは、2 回目から $(n-1)$ 回目までは直前の回と異なる目が出て、 n 回目に直前と同じ目が出る場合である。

直前の回と同じ目が出る確率は $\frac{1}{6}$ ，異なる目が出る確率は $\frac{5}{6}$ である。

$$1 \text{ 回目は何の目が出ていてもよいから } P_n = 1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$$

$$(2) \quad S_n = \sum_{k=2}^n P_k = \sum_{k=2}^n \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} = \frac{\frac{1}{6} \left\{ 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \right\}}{1 - \frac{5}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$(3) \quad S_n \geq \frac{1}{2} \text{ となるとき, (2) から } 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{整理すると } \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{2}$$

ここで、 $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ について

$$n=2 \text{ のとき } \frac{5}{6} > \frac{1}{2}$$

$$n=3 \text{ のとき } \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36} > \frac{1}{2}$$

$$n=4 \text{ のとき } \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} > \frac{1}{2}$$

$$n=5 \text{ のとき } \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} < \frac{1}{2}$$

よって、 $S_n \geq \frac{1}{2}$ となる最小の n は $n=5$

$$(4) \quad E_n = \sum_{k=2}^n k P_k = \frac{1}{6} \sum_{k=2}^n k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}$$

よって、 $6E_n = \sum_{k=2}^n k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}$ から

$$6E_n = 2 + 3 \cdot \frac{5}{6} + 4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots + n \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$$

$$\text{両辺に } \frac{5}{6} \text{ を掛けると } 5E_n = 2 \cdot \frac{5}{6} + 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots + (n-1) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + n \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

辺々を引くと

$$\begin{aligned}
E_n &= 2 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} - n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = 2 + \frac{\frac{5}{6}\left\{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\right\}}{1 - \frac{5}{6}} - n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\
&= 7 - 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} - n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = 7 - (n+6)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

2 [2022 神戸大]

(解説)

接線の方程式は、 $f'(x) = x$ から

$$y - \left(\frac{1}{2}t^2 - a\right) = t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad 2tx - 2y - t^2 - 2a = 0$$

ゆえに、 $a > 0$ から

$$g(t) = \frac{|-t^2 - 2a|}{\sqrt{(2t)^2 + (-2)^2}} = \frac{t^2 + 2a}{2\sqrt{t^2 + 1}}$$

$$\text{よって} \quad g'(t) = \frac{2t \cdot 2\sqrt{t^2 + 1} - (t^2 + 2a) \cdot \frac{4t}{2\sqrt{t^2 + 1}}}{(2\sqrt{t^2 + 1})^2} = \frac{t(t^2 - 2a + 2)}{2(t^2 + 1)\sqrt{t^2 + 1}}$$

[1] $2a - 2 \leq 0$ すなわち $0 < a \leq 1$ のとき

$$t^2 - 2a + 2 \geq 0 \text{ であり, } g'(t) = 0 \text{ とすると } t = 0$$

よって、 $g(t)$ の増減表は右のようになる。

したがって、 $g(t)$ は $t = 0$ で最小値 $\frac{0 + 2a}{2\sqrt{0 + 1}} = a$ をとる。

t	...	0	...
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$	↘	極小	↗

[2] $2a - 2 > 0$ すなわち $a > 1$ のとき

$$g'(t) = 0 \text{ とすると}$$

$$t = 0, \pm\sqrt{2a - 2}$$

よって、 $g(t)$ の

増減表は右のよう

になる。

t	...	$-\sqrt{2a - 2}$	...	0	...	$\sqrt{2a - 2}$	...
$g'(t)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(t)$	↘	極小	↗	極大 a	↘	極小	↗

$$g(\pm\sqrt{2a - 2}) = \frac{(2a - 2) + 2a}{2\sqrt{(2a - 2) + 1}} = \sqrt{2a - 1} \text{ であるから, } g(t) \text{ は}$$

$t = \pm\sqrt{2a - 2}$ で最小値 $\sqrt{2a - 1}$ をとる。

3 [1996 京都大]

解説

$$(1) \quad \begin{aligned} \cos 5\theta &= \cos 4\theta \cos \theta - \sin 4\theta \sin \theta = \cos \theta (2\cos^2 2\theta - 1) - 2\sin \theta \sin 2\theta \cos 2\theta \\ &= \cos \theta \{2(2\cos^2 \theta - 1)^2 - 1 - 4(1 - \cos^2 \theta)(2\cos^2 \theta - 1)\} \end{aligned}$$

よって、 $\cos \theta = x$ とおくと

$$f(x) = x\{2(2x^2 - 1)^2 - 1 - 4(1 - x^2)(2x^2 - 1)\} = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

(2) $\theta = \alpha, 3\alpha, 5\alpha, 7\alpha, 9\alpha$ は、 $\cos 5\theta = 0$ の $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ でのすべての解であるから、
 $x = \cos \alpha, \cos 3\alpha, 0, \cos 7\alpha, \cos 9\alpha$ は $f(x) = 0$ の相異なる解である。

ゆえに、 $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ の相異なる 4 つの解が $\cos \alpha, \cos 3\alpha, \cos 7\alpha, \cos 9\alpha$

となる。よって、解と係数の関係により $\cos \alpha \cos 3\alpha \cos 7\alpha \cos 9\alpha = \frac{5}{16}$

4 [2022 大阪大]

解説

線分 PQ の方程式は $y - t = \frac{0 - t}{\frac{1}{t} - 0} x \quad (x \geq 0, y \geq 0)$

よって $y = -t^2 x + t \quad (x \geq 0, y \geq 0)$

t について整理すると $xt^2 - t + y = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

点 (x, y) が線分 PQ が通過する部分に含まれる条件は、 t の方程式 $\textcircled{1}$ が $1 \leq t \leq 2$ の範囲に実数解をもつことである。

[1] $x = 0$ のとき

方程式 $\textcircled{1}$ は $-t + y = 0$

よって $t = y$

$\textcircled{1}$ が $1 \leq t \leq 2$ の範囲に実数解をもつための条件は

$$1 \leq y \leq 2$$

[2] $x \neq 0$ すなわち $x > 0$ のとき

t の 2 次方程式が $1 \leq t \leq 2$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解をもつための条件を考える。

$$f(t) = xt^2 - t + y \text{ とおくと } f(t) = x\left(t - \frac{1}{2x}\right)^2 - \frac{1}{4x} + y$$

(i) $f(1) \cdot f(2) \leq 0$ のとき

$$f(1) = x - 1 + y, \quad f(2) = 4x - 2 + y \text{ より}$$

$$(x + y - 1)(4x + y - 2) \leq 0$$

すなわち

$$\begin{cases} x+y-1 \geq 0 \\ 4x+y-2 \leq 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x+y-1 \leq 0 \\ 4x+y-2 \geq 0 \end{cases}$$

このとき、 $f(t)=0$ は $1 \leq t \leq 2$ の範囲に少なくとも1つ実数解をもつ。

(ii) $f(1) \cdot f(2) > 0$ のとき

このとき、 $f(t)=0$ が $1 \leq t \leq 2$ の範囲に少なくとも1つ実数解をもつための条件は

$$(ア) \quad 1 < \frac{1}{2x} < 2$$

$$(イ) \quad -\frac{1}{4x} + y \leq 0$$

$$(ウ) \quad f(1) > 0$$

$$(エ) \quad f(2) > 0$$

$$(ア) \quad 1 < \frac{1}{2x} < 2 \text{ より} \quad \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$$

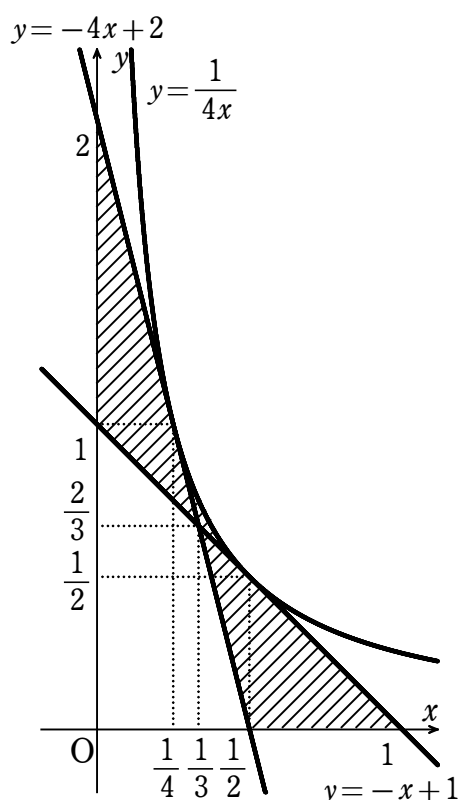
$$(イ) \quad -\frac{1}{4x} + y \leq 0 \text{ より} \quad y \leq \frac{1}{4x}$$

$$(ウ) \quad f(1) > 0 \text{ より} \quad x+y-1 > 0$$

$$(エ) \quad f(2) > 0 \text{ より} \quad 4x+y-2 > 0$$

[1], [2] と $y \geq 0$ より、線分 PQ が通過する部分は右の図の斜線部分である。

ただし、境界線は含む。



別解 $y = -xt^2 + t$ ($x \geq 0, y \geq 0$) において、 x を $x \geq 0$ で固定し、 t を $1 \leq t \leq 2$ の範囲で動かしたときの y の値域を求める。

$g(t) = -xt^2 + t$ とおく。

[1] $x=0$ のとき

$$g(t) = t \text{ であるから、} 1 \leq t \leq 2 \text{ のとき} \quad g(1) \leq y \leq g(2)$$

$$\text{よって} \quad 1 \leq y \leq 2$$

[2] $x > 0$ のとき

$$g(t) = -x\left(t - \frac{1}{2x}\right)^2 + \frac{1}{4x}$$

$$(i) \quad 0 < \frac{1}{2x} \leq 1 \text{ すなわち } \frac{1}{2} \leq x \text{ のとき}$$

$$g(2) \leq y \leq g(1) \text{ より} \quad -4x+2 \leq y \leq -x+1$$

$$(ii) \quad 1 < \frac{1}{2x} \leq \frac{3}{2} \text{ すなわち } \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2} \text{ のとき}$$

$$g(2) \leq y \leq g\left(\frac{1}{2x}\right) \text{ より} \quad -4x+2 \leq y \leq \frac{1}{4x}$$

$$(iii) \quad \frac{3}{2} < \frac{1}{2x} \leq 2 \text{ すなわち } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{3} \text{ のとき}$$

$$g(1) \leq y \leq g\left(\frac{1}{2x}\right) \text{ より}$$

$$-x+1 \leq y \leq \frac{1}{4x}$$

$$(iv) \quad 2 < \frac{1}{2x} \text{ すなわち } 0 < x < \frac{1}{4} \text{ のとき}$$

$$g(1) \leq y \leq g(2) \text{ より}$$

$$-x+1 \leq y \leq -4x+2$$

以上より, x, y が満たす条件は

$$y \geq 0$$

$$\text{かつ} \quad \left\{ \begin{array}{ll} 1 \leq y \leq 2 & (x=0) \\ -x+1 \leq y \leq -4x+2 & \left(0 < x < \frac{1}{4}\right) \\ -x+1 \leq y \leq \frac{1}{4x} & \left(\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{3}\right) \\ -4x+2 \leq y \leq \frac{1}{4x} & \left(\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}\right) \\ -4x+2 \leq y \leq -x+1 & \left(\frac{1}{2} \leq x\right) \end{array} \right.$$

