

1 [2025 京都大]

解説

(i) $\frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 2x - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$ であるから,

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 2x - \frac{2x}{x^2+1} \right) dx, \quad I_2 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1} dx$$

とすると (与式) = $I_1 + I_2$

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)'}{\sqrt{x^2+1}} + 2x - \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \right\} dx = \left[\sqrt{x^2+1} + x^2 - \log(x^2+1) \right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 4 - \log 4 = 4 - 2\log 2$$

$$I_2 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1} dx \text{ について, } x = \tan \theta \text{ とおくと } dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0 \rightarrow \sqrt{3}$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{3}$

よって
$$I_2 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$$

ゆえに (与式) = $I_1 + I_2 = 4 - 2\log 2 + \frac{\pi}{3}$

(ii)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right| dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\cos \frac{x}{2} \right)'}{\cos \frac{x}{2}} dx = -2 \left[\log \left| \cos \frac{x}{2} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -2 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = \log 2$$

2 [2025 北海道大]

解説

- (1) $a_n = \alpha r^{n-1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) であり, $\alpha > 1$, $r > 1$ であるから $\alpha r^n > 1$
 すなわち, すべての自然数 n に対して $a_n > 1$

よって $b_n = \log_{a_n} a_{n+1}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\log_{\alpha} a_{n+1}}{\log_{\alpha} a_n} = \frac{\log_{\alpha} (\alpha r^n)}{\log_{\alpha} (\alpha r^{n-1})} \\ &= \frac{\log_{\alpha} \alpha + \log_{\alpha} r^n}{\log_{\alpha} \alpha + \log_{\alpha} r^{n-1}} \\ &= \frac{n \log_{\alpha} r + 1}{(n-1) \log_{\alpha} r + 1} \end{aligned}$$

- (2) $b_n = \frac{n+2}{n+1}$ すなわち

$$\frac{n \log_{\alpha} r + 1}{(n-1) \log_{\alpha} r + 1} = \frac{n+2}{n+1} \quad \dots\dots (*)$$

とする。

(*) がすべての自然数 n で成り立つとき, $n=1$ でも (*) が成り立つから, (*) に $n=1$ を代入して $\log_{\alpha} r + 1 = \frac{3}{2}$

よって $\log_{\alpha} r = \frac{1}{2}$ すなわち $r = \alpha^{\frac{1}{2}}$

($\alpha > 1$ であるから $r > 1$ を満たす)

逆に, $r = \alpha^{\frac{1}{2}}$ すなわち $\log_{\alpha} r = \frac{1}{2}$ のとき

$$\frac{n \log_{\alpha} r + 1}{(n-1) \log_{\alpha} r + 1} = \frac{n \cdot \frac{1}{2} + 1}{(n-1) \cdot \frac{1}{2} + 1} = \frac{n+2}{n+1}$$

となり, すべての自然数 n で (*) が成り立つ。

したがって, (*) がすべての自然数 n で成り立つための必要十分条件は $r = \alpha^{\frac{1}{2}}$

- (3) (2) の条件が成り立つとき, $a_n = \alpha r^{n-1}$, $r = \alpha^{\frac{1}{2}}$ より

$$a_1 a_2 = \alpha \cdot \alpha r = \alpha^2 \alpha^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{5}{2}}$$

$$a_1 a_2 a_3 = \alpha^{\frac{5}{2}} \cdot \alpha r^2 = \alpha^{\frac{7}{2}} \left(\alpha^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \alpha^{\frac{9}{2}}$$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = \alpha^{\frac{9}{2}} \cdot \alpha r^3 = \alpha^{\frac{11}{2}} \left(\alpha^{\frac{1}{2}} \right)^3 = \alpha^7$$

$a_1 a_2$, $a_1 a_2 a_3$, $a_1 a_2 a_3 a_4$ の整数部分がそれぞれ 2 桁, 3 桁, 4 桁となる条件は

$$10 \leq \alpha^{\frac{5}{2}} < 10^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$10^2 \leq \alpha^{\frac{9}{2}} < 10^3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$10^3 \leq \alpha^7 < 10^4 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

をすべて満たすことである。

$\alpha > 1$ であるから、①、②、③ はそれぞれ

$$10^{\frac{2}{5}} \leq \alpha < 10^{\frac{4}{5}}, \quad 10^{\frac{4}{9}} \leq \alpha < 10^{\frac{2}{3}}, \quad 10^{\frac{3}{7}} \leq \alpha < 10^{\frac{4}{7}}$$

$$\text{ここで, } \frac{2}{5} \left(= \frac{12}{30} \right) < \frac{3}{7} \left(= \frac{12}{28} \right) < \frac{4}{9} \left(= \frac{12}{27} \right),$$

$$\frac{4}{7} < \frac{2}{3} \left(= \frac{4}{6} \right) < \frac{4}{5}, \quad \frac{4}{9} < \frac{4}{7}$$

であるから、①、②、③ をすべて満たす α の値の範囲は $10^{\frac{4}{9}} \leq \alpha < 10^{\frac{4}{7}}$

3 [2025 神戸大]

解説

(1) $x(\theta) = \sin \theta$, $y(\theta) = \cos \theta + |\sin \theta|$ とおくと

$$x(2\pi - \theta) = \sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta = -x(\theta)$$

$$y(2\pi - \theta) = \cos(2\pi - \theta) + |\sin(2\pi - \theta)| = \cos \theta + |\sin \theta| = y(\theta)$$

よって、曲線 C の $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分と、 $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ の部分は y 軸に関して対称である。 $0 \leq \theta \leq \pi$ のときを考える。

$$x = \sin \theta \text{ より } \frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 0 \text{ とすると, } 0 \leq \theta \leq \pi \text{ より } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ より } y = \cos \theta + \sin \theta$$

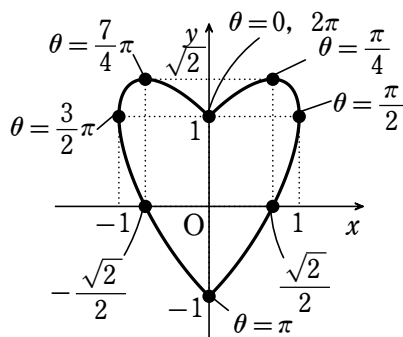
$$\text{よって } \frac{dy}{d\theta} = -\sin \theta + \cos \theta = -\sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 0 \text{ とすると, } -\frac{\pi}{4} \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi \text{ より } \theta - \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\text{すなわち } \theta = \frac{\pi}{4}$$

したがって、 θ の値に対応する x , y の値の変化は次のようになる。

θ	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$\frac{dx}{d\theta}$		+	+	+	0	-	
$\frac{dy}{d\theta}$		+	0	-	-	-	
(x, y)	(0, 1)	$\nearrow$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$	$\searrow$	(1, 1)	$\swarrow$	(0, -1)

 y 軸に関して対称なことと合わせると、曲線 C の概形は次のようになる。(2) 曲線 C の $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の部分を表す関数を y_1 , $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ の部分を表す関数を y_2 とし、求める面積を S とすると、 y 軸に関する対称性から

$$\begin{aligned} S &= 2 \left(\int_0^1 y_1 dx - \int_0^1 y_2 dx \right) \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + \sin \theta) \cdot \frac{dx}{d\theta} \cdot d\theta - 2 \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + \sin \theta) \cdot \frac{dx}{d\theta} \cdot d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + \sin \theta) \cos \theta d\theta + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos \theta + \sin \theta) \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi} (\cos \theta + \sin \theta) \cos \theta d\theta = \int_0^{\pi} (2\cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\theta + \sin 2\theta) d\theta = \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

4 [2025 京大]

(解説)

$9z^2$ は 3 の倍数であるから、 $x^6 + y^4$ すなわち $(x^3)^2 + (y^2)^2$ も 3 の倍数 …… ① である。

このとき、 x^3 、 y^2 が 3 の倍数であるかを考える。

整数 n について、 n^2 を 3 で割ったときの余りを調べる。

k を整数として

$$n = 3k \text{ のとき} \quad n^2 = 9k^2 = 3 \cdot 3k^2$$

$$n = 3k + 1 \text{ のとき} \quad n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

$$n = 3k + 2 \text{ のとき} \quad n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$$

よって、 n が 3 の倍数であるときは、 n^2 を 3 で割った余りは 0、 n が 3 の倍数でないときは、 n^2 を 3 で割った余りは 1 である。

ここで、 x^3 、 y^2 の少なくとも一方が 3 の倍数でないと仮定する。

[1] x^3 、 y^2 がともに 3 の倍数でないとき

$$(x^3)^2 + (y^2)^2 \text{ を 3 で割った余りは } 1 + 1 = 2$$

これは、① に矛盾する。

[2] x^3 、 y^2 の一方が 3 の倍数であり、もう一方が 3 の倍数でないとき

$$(x^3)^2 + (y^2)^2 \text{ を 3 で割った余りは } 0 + 1 = 1$$

これは、① に矛盾する。

[1]、[2] から、 x^3 、 y^2 はともに 3 の倍数である。

ゆえに、 x 、 y は 3 の倍数であるから、正の整数 a 、 b を用いて

$$x = 3a, \quad y = 3b$$

と表される。

$$\text{このとき} \quad 9z^2 = (3a)^6 + (3b)^4$$

$$\text{よって} \quad z^2 = 3^4 a^6 + 3^2 b^4 = 3(3^3 a^6 + 3b^4) \quad \dots\dots ②$$

ゆえに、 z^2 は 3 の倍数であるから、 z も 3 の倍数である。

よって、 z は正の整数 c を用いて、 $z = 3c$ と表されるから、② より

$$(3c)^2 = 3^4 a^6 + 3^2 b^4$$

$$\text{ゆえに} \quad c^2 = 3^2 a^6 + b^4 \quad \dots\dots ③$$

ここで、 N が最小となるのは、 c が最小となるときである。

$$(a, b) = (1, 1) \text{ のとき} \quad c^2 = 3^2 \cdot 1^6 + 1^4 = 10$$

これを満たす正の整数 c は存在しない。

よって、不適。

$$(a, b) = (1, 2) \text{ のとき} \quad c^2 = 3^2 \cdot 1^6 + 2^4 = 25$$

$$c \text{ は正の整数であるから} \quad c = 5$$

$$a \geq 2, b \geq 1 \text{ のとき} \quad c^2 = 3^2 a^6 + b^4 \geq 3^2 \cdot 2^6 + 1^4 = 577 > 25$$

ゆえに、③ を満たす正の整数 c の最小の値は $c = 5$

$$\text{したがって、求める } N \text{ の最小値は} \quad N = 9z^2 = 9(3c)^2 = 9(3 \cdot 5)^2 = 2025$$