

1

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

(1) $\sin 2\theta = \cos \theta$ (2) $\cos 2\theta - 3\cos \theta + 2 \geq 0$

【解答】 (1) $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$ (2) $\theta = 0, \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$

【解説】

(1) 方程式から $2\sin \theta \cos \theta = \cos \theta$

ゆえに $\cos \theta (2\sin \theta - 1) = 0$

よって $\cos \theta = 0, \sin \theta = \frac{1}{2}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから $\cos \theta = 0$ より $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

$\sin \theta = \frac{1}{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

以上から、解は $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$

(2) 不等式から $2\cos^2 \theta - 1 - 3\cos \theta + 2 \geq 0$

整理すると $2\cos^2 \theta - 3\cos \theta + 1 \geq 0$

ゆえに $(2\cos \theta - 1)(\cos \theta - 1) \geq 0$

よって $\cos \theta \leq \frac{1}{2}, 1 \leq \cos \theta$

$0 \leq \theta < 2\pi$ では、 $\cos \theta \leq 1$ であるから $\cos \theta \leq \frac{1}{2}, \cos \theta = 1$

したがって、解は $\theta = 0, \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$

2

次の式を $r\sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ。ただし、 $r > 0, -\pi < \alpha \leq \pi$ とする。

(1) $\sqrt{3}\sin \theta + 3\cos \theta$ (2) $\cos \theta - \sqrt{3}\sin \theta$ (3) $2\sin \theta + \sqrt{5}\cos \theta$

【解答】 (1) $2\sqrt{3}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ (2) $2\sin\left(\theta + \frac{5}{6}\pi\right)$

(3) $3\sin(\theta + \alpha)$ ただし、 $\cos \alpha = \frac{2}{3}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

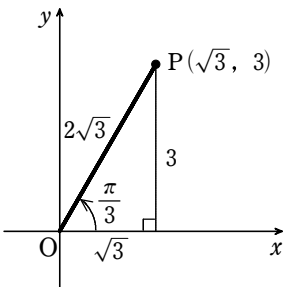
【解説】

(1) $P(\sqrt{3}, 3)$ とすると

$OP = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角は $\frac{\pi}{3}$

よって $\sqrt{3}\sin \theta + 3\cos \theta = 2\sqrt{3}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

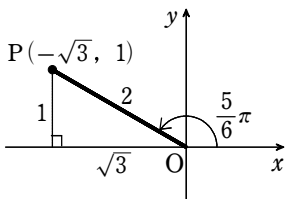


(2) $P(-\sqrt{3}, 1)$ とすると

$OP = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角は $\frac{5}{6}\pi$

よって $\cos \theta - \sqrt{3}\sin \theta = 2\sin\left(\theta + \frac{5}{6}\pi\right)$



(3) $P(2, \sqrt{5})$ とすると

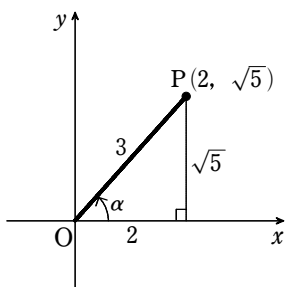
$OP = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3$

また、線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$\cos \alpha = \frac{2}{3}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

よって $2\sin \theta + \sqrt{5}\cos \theta = 3\sin(\theta + \alpha)$

ただし、 $\cos \alpha = \frac{2}{3}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$



3

加法定理を用いて、次の値を求めよ。

(1) $\sin 105^\circ, \cos 105^\circ, \tan 105^\circ$ (2) $\sin 15^\circ, \cos 15^\circ, \tan 15^\circ$

【解答】 (1) $\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}, \tan 105^\circ = -2 - \sqrt{3}$

(2) $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$

【解説】

(1) $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

$\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ}$

$= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{1 - 3} = -2 - \sqrt{3}$

(2) $\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

$\tan 15^\circ = \tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ}$

$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = 2 - \sqrt{3}$

4

加法定理と2倍角の公式を用いて、次の等式(3倍角の公式)を証明せよ。

(1) $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$ (2) $\cos 3\alpha = -3\cos \alpha + 4\cos^3 \alpha$

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1) $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$
 $= 2\sin \alpha \cos \alpha \cdot \cos \alpha + (1 - 2\sin^2 \alpha)\sin \alpha$
 $= 2\sin \alpha(1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha$
 $= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$
(2) $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha$
 $= (2\cos^2 \alpha - 1)\cos \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha \cdot \sin \alpha$
 $= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha)\cos \alpha$
 $= -3\cos \alpha + 4\cos^3 \alpha$

参考 $\tan 3\alpha = \tan(2\alpha + \alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan \alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan \alpha}$
 $= \frac{\frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} + \tan \alpha}{1 - \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \tan \alpha}$
 $= \frac{2\tan \alpha + (1 - \tan^2 \alpha)\tan \alpha}{(1 - \tan^2 \alpha) - 2\tan^2 \alpha}$
 $= \frac{3\tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3\tan^2 \alpha} = \frac{\tan^3 \alpha - 3\tan \alpha}{3\tan^2 \alpha - 1}$

5

$\tan \theta = \frac{1}{2}$ のとき、 $\cos 2\theta$ 、 $\sin 2\theta$ の値を求めよ。

解答 $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$, $\sin 2\theta = \frac{4}{5}$

解説

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 \theta} - 1 = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta = 2\tan \theta \cos^2 \theta = 2\tan \theta \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

6

$\sin \frac{3}{8}\pi$ 、 $\cos \frac{3}{8}\pi$ 、 $\tan \frac{3}{8}\pi$ の値を求めよ。

解答 $\sin \frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$, $\cos \frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$, $\tan \frac{3}{8}\pi = \sqrt{2} + 1$

解説

$$\sin^2 \frac{3}{8}\pi = \frac{1 - \cos \frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{3}{8}\pi > 0 \text{ であるから } \sin \frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos^2 \frac{3}{8}\pi = \frac{1 + \cos \frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{3}{8}\pi > 0 \text{ であるから } \cos \frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan \frac{3}{8}\pi = \sin \frac{3}{8}\pi \div \cos \frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2 + \sqrt{2})^2}{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$$

1 0≦θ<2π のとき，次の方程式，不等式を解け。 (1) sin 2θ = cos θ (2) cos 2θ − 3cos θ + 2 ≧ 0	2 次の式を r sin (θ + α) の形に変形せよ。ただし，r > 0，−π < α ≦ π とする。 (1) √3 sin θ + 3cos θ (2) cos θ − √3 sin θ (3) 2sin θ + √5 cos θ	3 加法定理を用いて，次の値を求めよ。 (1) sin 105°, cos 105°, tan 105° (2) sin 15°, cos 15°, tan 15°
--	--	--

4

加法定理と 2 倍角の公式を用いて，次の等式 (3 倍角の公式) を証明せよ。

(1) $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$ (2) $\cos 3\alpha = -3\cos \alpha + 4\cos^3 \alpha$

5

$\tan \theta = \frac{1}{2}$ のとき， $\cos 2\theta$ ， $\sin 2\theta$ の値を求めよ。

6

$\sin \frac{3}{8}\pi$ ， $\cos \frac{3}{8}\pi$ ， $\tan \frac{3}{8}\pi$ の値を求めよ。