

【いろいろな力と運動方程式】

■慣性の法則■

物体に外部から力がはたらかないとき、または、いくつかの力がはたらいてもそれらの力がつりあっているときは、止まっている物体はいつまでも静止を続け、動いている物体は等速直線運動を続ける。

■運動方程式■

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \cdot \text{加速度があるところに力あり。}$$

$$(F = m \frac{d^2x}{dt^2}) \quad \cdot \text{加速度の向きと、合成された力の向きは一致。}$$

・物体1つずつに適用すること。(一体となった物体でも可)

運動方程式のたて方

- ① 各物体ごとに力の図示
- ② 運動の向きに合わせて座標軸と正の向きを決める
- ③ 物体にはたらいっている力を、加速度の方向とこれに垂直な方向とに分解
- ④ 加速度の方向にはたらく力を、正負を考慮して、 $F = ma$ に代入 (垂直方向の確認)

○質量と重さの違い

質量[kg]…物質の量を表し、物体に固有のもので、どこにあっても値が変わらない。

重さ[N]or[kgw]…地球が物体を引く力(重力)の大きさを、場所によって値が異なる。

- ニュートンの運動の3法則
- 第一法則…慣性の法則
 - 第二法則…運動の法則 (運動方程式)
 - 第三法則…作用反作用の法則

○ 離れない条件：離れないとして求めた垂直抗力 $N \geq 0$

たるまない条件：たるまないとして求めた糸が引く力 $T \geq 0$

すべらない条件：すべらないとして求めた静止摩擦力 $F \leq \mu N$

■物体系の運動■

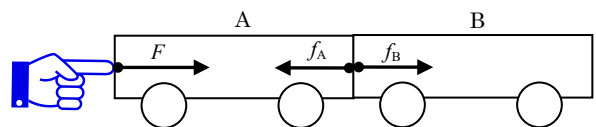
物体系：ひとまとまりとした複数の物体

内力：物体系内の物体どうしがたがいに及ぼしあっている力。

(右図 A, B を物体系とすると f_A と f_B)

外力：物体系以外のものから、物体系内の物体にはたらく力

(右図 A, B を物体系とすると F)



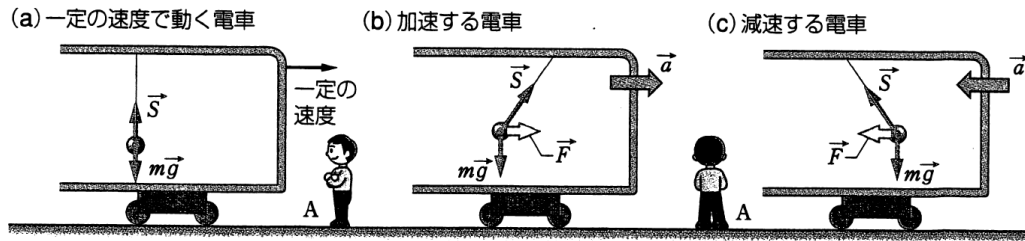
○複数の物体が相互に力を及ぼしあう場合における物体の運動方程式の立て方

- (i) 原則は、物体1つ1つについて、個別に運動方程式をたてる。
- (ii) 一体となった運動の場合、物体系全体をまとめて1つの物体と考えることができる。
その際、内力は打ち消しあい、考慮しない。

■慣性力■

(i) 慣性系（静止・等速直線運動をする観測者から見る）

⇒運動方程式

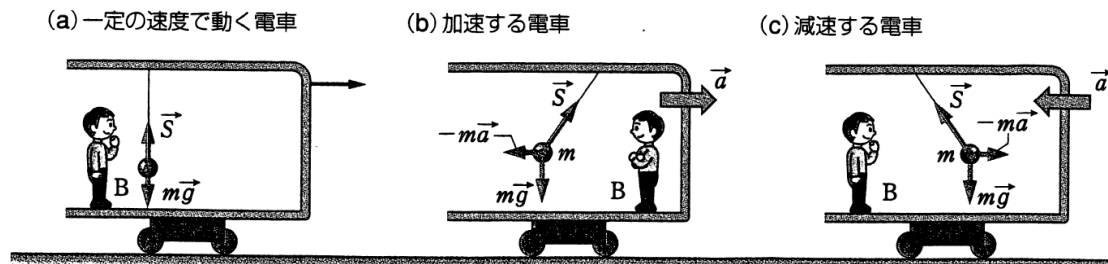


(ii) 非慣性系（加速度運動をする観測者から見る）

慣性力：加速度 $\vec{a}$ で運動する観測者から見た場合、物体（質量 m ）にはたらく $\vec{a}$ と

反対の向きのみかけの力 $-\vec{ma}$

⇒慣性力を考慮した式をたてる。



※みかけの重力加速度

(ii)(b)の場合、大きさ $\sqrt{a^2 + g^2}$ の重力加速度がかかっているように見える。

・エレベーターの場合は？

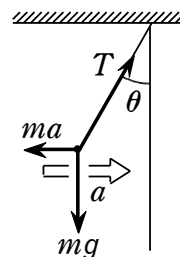
<例題 5>

エレベーターの床に台ばかりを置いておもりをのせる。エレベーターが静止しているとき、目盛りは 49N を示した。重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 とする。

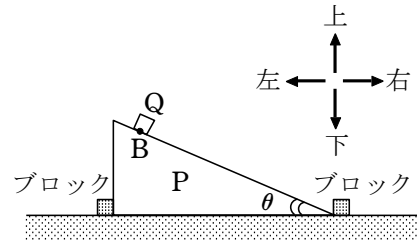
- (1) エレベーターが上向きに 1.2m/s^2 の加速度で動いているとき、はかりの針は何 N を示すか。
- (2) はかりの針が 40N を示しているとき、エレベーターはどんな運動をしているか。

<例題 6>

水平な一直線上を、一定の加速度 a ($a > 0$) で加速している電車がある。この電車の天井からつるしたおもりの糸が鉛直線となす角を θ として、 $\tan\theta$ の値を求めよ。重力加速度の大きさを g とする。



【6】図のように、水平でなめらかな床に、質量 M の三角形の台 P を置き、ブロックで両側を固定した。 P は床と角度 θ をなすなめらかな斜面をもつ。斜面上の点 B に質量 m の小物体 Q を置き、静かにはなしたところ、 Q は斜面をすべり落ちた。重力加速度の大きさを g として、次の問いに



答えよ。

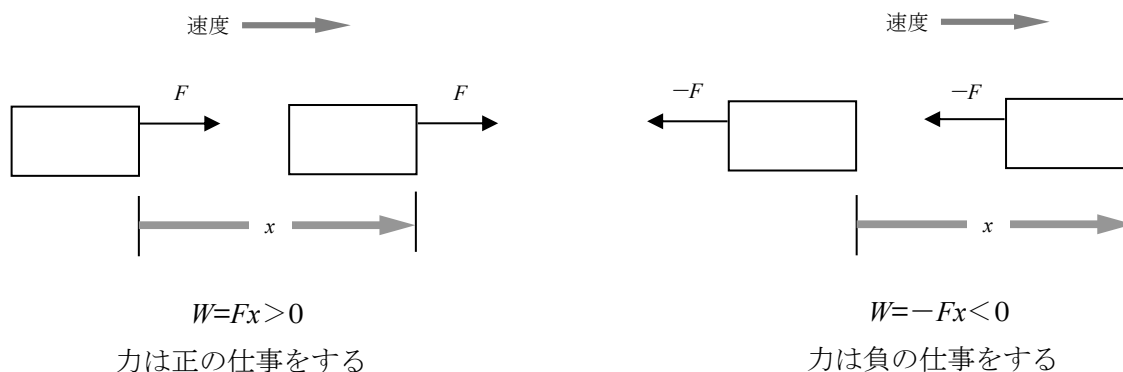
- (1) Q が斜面をすべっているとき、 Q の加速度の大きさはいくらか。
 - (2) 点 B から斜面にそって距離 d だけすべったときの Q の速さはいくらか。
- 次に、両側のブロックを取り除いて、すべり落ちた Q を再び点 B に置いた状態で、 P と Q を保持した。
- P と Q を同時に静かにはなしたところ、 Q は斜面をすべり、 P は加速度 A の等加速度運動をした。 Q が P から受ける垂直抗力の大きさを N とする。
- (3) 加速度 A の向きは、図中の上下左右のいずれか。
 - (4) P の水平方向の運動方程式を記せ。
 - (5) Q の運動を、等加速度運動する P から見たとき、
 - (a) Q にはたらく慣性力の向きは、図中の上下左右のいずれか。
 - (b) Q にはたらく慣性力の大きさはいくらか。
 - (c) 斜面に垂直な方向についての Q の運動方程式を記せ。
 - (6) 前問 (4) と (5) (c) で得られた式から A と N を求め、それぞれを M , m , g , θ で表せ。

【力学的エネルギーと仕事】

■仕事■

物体に力 F が働いて、加えている力の向き（**一直線上**）に物体が位置 x_1 から x_2 まで変位したとき、この力が物体にした仕事（スカラー量）

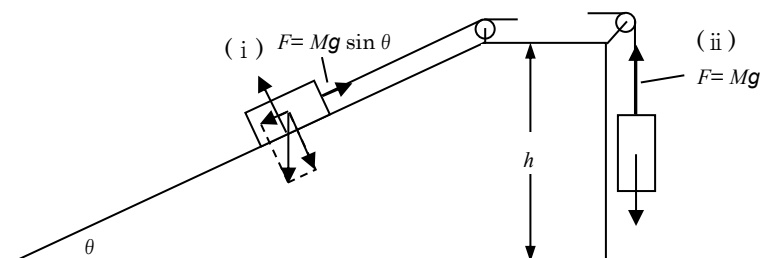
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \bar{F}(x_2 - x_1) [\text{J}] = [\text{N} \cdot \text{m}]$$



※斜め方向に力がはたらくときは？

○仕事の原理

傾角を θ とするなめらかな斜面に沿って、質量 $M [\text{kg}]$ の物体を高さ $h [\text{m}]$ 引き上げる場合、物体を引き上げる力の仕事について



(i) のように斜面に沿って引き上げる場合、物体にはたらく重力の斜面方向の分力は $Mg \sin \theta [\text{N}]$ となるため、(ii) 鉛直上向きに直接引き上げる場合に比べて小さい力で

すむ。しかし、高さ $h [\text{m}]$ 引き上げるには、斜面上の移動距離は、 $\frac{h}{\sin \theta}$ となって長くなる。

斜面方向の分力のする仕事は $W = Mg \sin \theta \times \frac{h}{\sin \theta} = Mgh$ となり、直接引き上げるときと

同じ仕事量になる。物体を重力に逆らって上方に引き上げるとき、機械を使って小さい力で行なうことはできるが、仕事で得することはできない。これを仕事の原理という。

※物体には斜面からの垂直抗力もはたらくが、これは重力の斜面に垂直な方向の分力とつりあい、また、物体の移動方向と直角の方向であるから、この力は仕事をしない。

○仕事率

1 秒間あたりにする仕事の割合を、仕事率という。

$$t[\text{s}] \text{間に } W[\text{J}] \text{の仕事をするときの仕事率 } P = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = Fv [\text{W}] \text{または} [\text{J/s}]$$

■エネルギー■

物体が仕事をする能力をもっているとき物体はエネルギーをもっているという。

つまり、エネルギーとは仕事をする能力を示すもの。(スカラー量)

※物体のエネルギーの変化＝された仕事となる。(エネルギーの原理)

単位は仕事と同じく[J]である。

力学的
エネルギー

○運動エネルギー

質量 m [kg] の物体が速さ v [m/s] で運動しているとき

$$\text{運動エネルギー } K = \frac{1}{2}mv^2 [\text{J}]$$

○重力による位置エネルギー

基準面から h [m] の高さにある質量 m [kg] の物体

$$\text{位置エネルギー } U = mgh [\text{J}]$$

○弾性力による位置エネルギー

ばね定数 k [N/m] のばねにつけられた物体が**自然長から x [m] だけ伸びたとき**

$$\text{位置エネルギー } U = \frac{1}{2}kx^2 [\text{J}]$$

○保存力

物体が動くとき、物体にはたらく力のする仕事が経路に関係なく、始点と終点の位置だけで決まるような場合、その力を保存力という。重力や弾性力など。

○力学的エネルギーが保存される場合

保存力（重力、弾性力、静電気力、磁気力）以外の外力が仕事をしないとき
力学的エネルギーは保存される。

力学的エネルギー保存則：

$$\text{運動エネルギー} + \text{重力による位置エネルギー} + \text{弾性力による位置エネルギー} = \text{一定}$$

(※重力による位置エネルギーの基準面は自分で決めてよい。)

・鉛直につるしたばねでは $mgh + \frac{1}{2}kx^2$ (x : 自然長からの伸び) のかわりに、 $\frac{1}{2}ky^2$

(y : つりあいの位置からの伸び) を用いてもよい。

○力学的エネルギーが保存されない場合

物体に保存力以外の力が仕事をするとき、力学的エネルギーは変化する。

$$\text{最初の力学的エネルギー} + \text{非保存力のした仕事} = \text{その後の力学的エネルギー}$$

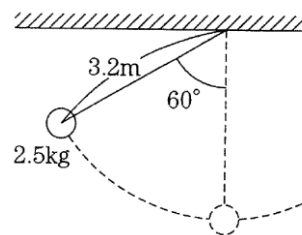
<例題 1>

静止している質量 $1.5[\text{kg}]$ の物体に、 $27[\text{J}]$ の仕事を加えると、物体の速さは何 $[\text{m/s}]$ になるか。

<例題 2>

図の位置から振り子が動きはじめた。おもりが最初に最下点を通過するまでに、

- (1) 糸がおもりを引く力（張力）がした仕事と重力がした仕事をそれぞれ求めよ。
- (2) 最下点を重力による位置エネルギーの基準とすると、最初の位置での重力による位置エネルギーはいくらか。
- (3) 最下点でのおもりの速さを求めよ。



<例題 3>

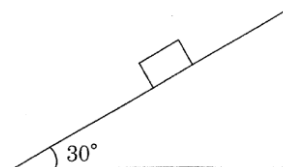
なめらかな水平面上で、ばね定数 8.0N/m のばねの一端を固定し、他端に質量 2.0kg の物体を取り付ける。ばねを 0.50m 引っ張ってはなした。



- (1) ばねが自然長になったときのおもりの速さはいくらか。
- (2) ばねが自然長より 0.30m 伸びた所を通過する瞬間のおもりの速さはいくらか。

<例題 4>

図のような傾き 30° の斜面上を質量 2.0kg の物体が、初速度 0 で斜面にそって 16m すべりおりた。このとき、物体の速さが 8.0m/s になった。物体と面との間の動摩擦力の大きさを求めよ。



【1】

なめらかな水平台上に質量 4.5kg の物体をおき、一定の大きさの力を水平に加えて、物体が 3.0m 直進したとき力を加えるのをやめた。このとき物体の速さは 4.0m/s であった。重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 とする。

(1) 力のした仕事 W [J] を求めよ。 (2) 力の大きさ F [N] を求めよ。

次に、別の水平台上に物体を移して、前問と同じ力を加え、同じ距離だけ直進したとき力を加えるのをやめたところ、物体はさらに 1.0m 直進して止まった。

(3) 物体と台との間の動摩擦係数 μ' を求めよ。

【2】

図1のように、水平な床面となす角が θ のなめらかな斜面上に、ばね定数 k のばねの下端を固定し上端に軽い板をとりつける。このとき、ばねの長さは自然長であった。次に、図2のように板を a だけ押し下げて Q の位置におき、この板の上に質量が m の物体をおいてから、静かに手を離した。その後、物体はばねの自然長の点 P において板から離れ、斜面上の点 R まで上って止まり、もどり始めた。重力加速度の大きさを g とする。

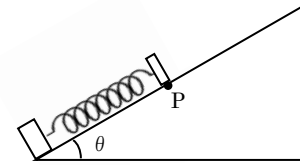


図1

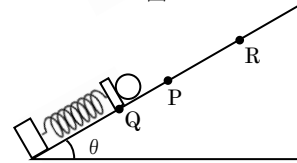


図2

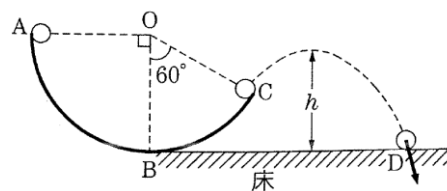
- (1) 図2のとき、弾性力による位置エネルギー U を求めよ。
- (2) 物体が板から離れるときの物体の速さ v を求めよ。
- (3) QR 間の距離 l を求めよ。

【3】ばね定数 k のばねの上端を天井に固定し、下端に質量 m のおもりをつけてつりあわせる。重力加速度の大きさを g とし、空気の抵抗を無視するとき、次の問いに答えよ。

- (1) おもりがつりあいの位置にあるとき、ばねの自然長からの伸び a を求めよ。
- (2) つりあいの位置からおもりをさらに b だけ引き下げて手を離す。おもりが(1)のつりあいの位置を通過するときの速さ v を求めよ。

<例題 5>

右図のように、断面が O 点を中心とした半径 3.2m の円形をしたなめらかなすべり台がある。
いま、 O と同じ高さの点 A から物体を静かに
すべらせたところ、物体は C 点から空中に飛び
出した。



- (1) O 点の真下の点 B を物体が通過するときの速さはいくらか。
- (2) C 点から飛び出すときの物体の速さはいくらか。 $\angle COB = 60^\circ$ とする。
- (3) C 点から飛び出した後、物体は B 点よりいくらの高さ (図の h) まで上がるか。
- (4) 物体は、その後、 B 点と同じ高さの点 D で床に衝突したとすると、 D 点に衝突する直前の物体の速さはいくらか。

【4】(センター試験'97 本)

図1のようになめらかな斜面 AB とそれにつづく水平面があり，斜面上の点 A に質量 m の小物体を置く。点 A から静かにすべり出した小物体は点 B から空中に飛び出し，水平面上の点 C に落下する。点 A の水平面からの高さは h ，点 B で飛び出すときの速さは v_0 ，そのときの角度は水平面に対し $\theta(0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$ とする。また，重力加速度を g とし，空気の抵抗は無視できるものとする。

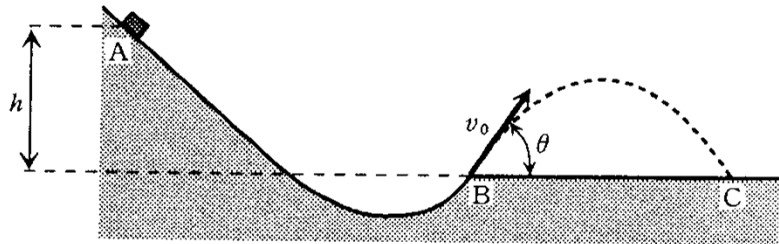


図 1

- (1) 点 B での小物体の速さ v_0 はいくらか。
- (2) 点 B を飛び出した小物体はある時間の後，軌道の最高点に達する。水平面から測った最高点の高さはいくらか。
- (3) 小物体は最高点を通過したのち点 C に落下する。2 点 BC 間の水平距離 x はいくらか。
- (4) 角度 θ をいくらにとると，水平到達距離 x が最大となるか。

【5】(2010 年 北九州市立大)

図のように、斜面と水平面がなめらかにつながっている。水平面には、ばね定数 $k[\text{N/m}]$ の質量が無視できるばねがあり、その右端は壁に固定されている。ばねは自然の長さで静止している。また、水平面上の BC 間以外はすべて摩擦のない滑らかな面となっている。今、水平面から高さ $h[\text{m}]$ の斜面上の点 A に大きさが無視できる質量 $m[\text{kg}]$ の小物体を置き、静かに手を離したところ、小物体は斜面を滑っていった。このとき、以下の空欄 に入れるのに適した数式を解答箇所に入力せよ。ただし、水平面上の BC 間は距離 $S[\text{m}]$ の摩擦のある粗い面となっており、小物体と粗い面の間の動摩擦係数は μ とする。また、重力加速度の大きさは $g[\text{m/s}^2]$ とし、空気の抵抗は無視できるとする。なお、空欄 に入れる数式に用いてよい記号は、与えられた量の記号 k, h, m, S, μ, g のみとする。

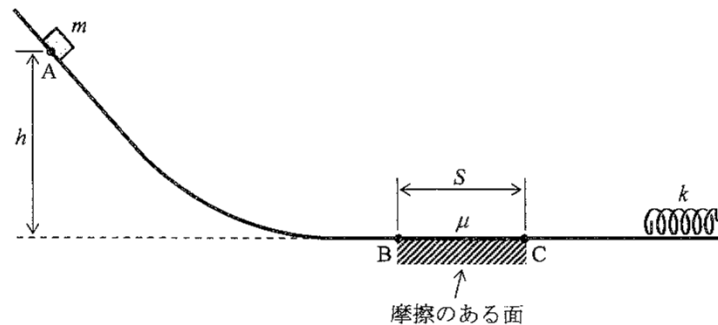


図 1.1 第 1 問の問題図

重力による位置エネルギーの基準面を水平面上にとると、力学的エネルギー保存の法則により、点 A に静止している状態の小物体がもつ位置エネルギーは、この小物体が斜面を滑り降り、点 B に達する直前の小物体がもつ運動エネルギーと等しくなる。よって、点 B に達する直前の小物体の速さを v_B とすると、 $v_B = \text{ア}$ $[\text{m/s}]$ となる。

つぎに、この小物体が BC 間を通過する際に、小物体が受ける摩擦力の大きさは、 $[\text{N}]$ であるので、小物体 BC 間を通過する間に失う力学的エネルギーは $[\text{J}]$ となる。したがって、点 C を通過した直後の小物体がもつ力学的エネルギーは $[\text{J}]$ となる。また、点 C を通過した直後の小物体の速さを v_c とすると、 $v_c = \text{オ}$ $[\text{m/s}]$ となる。

点 C を通過した小物体は水平面上でばね側へ運動を続けてばねに衝突した。衝突によってばねは自然の長さから $x[\text{m}]$ だけ縮んで小物体の速さは 0 になった。このとき、力学的エネルギー保存の法則により、 $= \text{カ}$ $\cdot x^2$ の関係が成り立ち、 $x = \text{キ}$ $[\text{m}]$ となる。

【6】図のように、摩擦のある水平面上で、ばね定数 k [N/m]

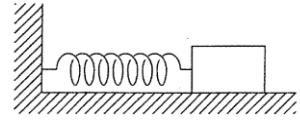
のばねの左端を固定し、右端に質量 m [kg]の物体を取り

付ける。自然長より d [m]だけばねを引き伸ばし静かに

はなしたところ、物体は左向きにすべり、ばねが自然長に

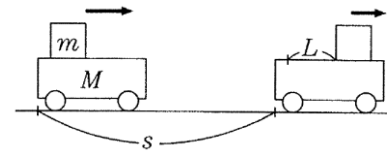
なるところを通過した。物体と面との動摩擦係数を μ とし、重力加速度の大きさを

g [m/s²]とする。



- (1) ばねが自然長になるところを、物体が最初に通過するときの速さはいくらか。
- (2) 物体が最初に止まる所は、ばねの縮みがいくらのところか。
- (3) 物体が最初に止まったところで、そのまま動き出さない場合、物体と面との間の静摩擦係数はいくら以上か。

【7】 水平でなめらかな床の上に、質量 M [kg] の台車を置き、台車の上に質量 m [kg] の物体を乗せる。物体に初速度 v_0 [m/s] を与えたところ、物体は台に対して L [m] すべった後、台車と同じ速度になった。



このときまでに、台車は床に対して s [m] 動いていた。物体と台車との間の動摩擦力を f [N]、重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。

- (1) 台車と物体に摩擦力がした仕事をそれぞれ求めよ。
- (2) 物体に初速を与えてから、物体と台車と同じ速度になるまでに、全体の力学的エネルギーはいくら変化したか。
- (3) 同じ速度になったときの台車の速さを f , L , m , M , v_0 を用いて表せ。